PRÁCTICAS MATEMÁTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA, DESDE UN ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

FRANCISCO ANTONIO GUTIÉRREZ CARDONA
Candidato a Magister

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, RISARALDA
2018

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA, DESDE UN ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

FRANCISCO ANTONIO GUTIÉRREZ CARDONA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Director de Tesis:

Ph. ELIÉCER ALDANA BERMÚDEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA, RISARALDA

2018

DEDICATORIA

Ante todo, darle gracias a Dios por permitirme
disfrutar de esta oportunidad, dándome
el regalo más apreciado….La vida.

A mi esposa y a mi hijo, por creer en mí,
Por ser el motor propulsor de salir adelante
Por ser los motivos más grandes y brindarme
ese amor y ayuda incondicional….mis razones
de seguir adelante

A Francisco y Consuelo, padres
Incondicionales, amorosos, únicos,
Seres maravillosos que me apoyaron
en todo momento y cubriéndome con sus
Bendiciones…LOS AMO.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo, doy gracias a Dios por guiar mi camino y por permitirme cumplir una de mis metas que siempre había deseado, de haberme dado la oportunidad con la vida y la ocasión. Una gran bendición.

En primer lugar agradezco a mi asesor, Dr. Eliécer Aldana Bermúdez, no solo por aceptar dirigir mi trabajo desde el inicio de la maestría, también por brindarme, su comprensión, paciencia, tiempo y sabias palabras en aquellos momentos de dudas e incertidumbre, palabras que lo orientan y lo encaminan a uno, cuando andaba en la zozobra y desorientación; por valorar y apoyar cada ocurrencia, idea, reto y desafíos, además de su apoyo incondicional, pero sobre todo por su generosidad y amistad; muchas gracias y bendiciones.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, por la formación aportada en cada uno de los seminarios, cursos y prácticas de cada semestre; conocimientos y aprendizajes logrados se vieron reflejados en cada parte de la culminación de este trabajo. A los compañeros de curso de la maestría, un agradecimiento enorme por la fraternidad y la amistad brindada, que sin lugar a duda fue un gran aliciente y motivación para terminar esta investigación.

A la rectora de la institución educativa Simón Bolívar (Quimbaya – Quindío), esp. Isabel Cristina Cañas López por abrirme el espacio en el colegio, el apoyo y palabras alentadoras de salir adelante.

A los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Simón Bolívar (2017), que participaron en el desarrollo de la innovación educativa, quienes se convirtieron en el motor fundamental para realizar el trabajo de campo y me permitieron obtener los datos más relevantes para la investigación. Un grupo con características excepcionales y de un gran valor humano.

Es evidente que no puedo olvidar el principal apoyo recibido, el de mi familia, mi especial agradecimiento por la comprensión, los consejos y la ayuda incondicional tanto en lo fraternal como económica.

Además, deseo hacer un reconocimiento a las personas, cercanas o lejanas, que sin tener un compromiso directo, hacen parte de mi vida laboral y estudiantil, dieron su granito de arena, que sin cuyo apoyo no hubiera podido llevar a cabo esta investigación.

¡INFINITAS GRACIAS!

Universidad
Tecnológica
de Pereira

Eliécer Aldana Bermúdez, doctor en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca, España y profesor de Didáctica de la Matemática de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad Tecnológica de Pereira.

CERTIFICA

Que la presente memoria titulada *"*Prácticas matemáticas para el aprendizaje de las medidas de dispersión en estudiantes de educación básica secundaria, desde un enfoque ontosemiótico*"*, ha sido realizada bajo mi dirección por *Francisco Antonio Gutierrez Cardona* y constituye su trabajo de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de la Matemática.

Y para que tenga los efectos oportunos ante la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, en el mes de mayo de dos mil dieciocho (2018).

Fdo. Eliécer Aldana Bermúdez

Director trabajo de grado

RESUMEN

Este trabajo de investigación centra su mirada en el desarrollo e implementación de la teoría de la idoneidad didáctica propuesta en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Esta investigación tiene dos grandes momentos: en el primer momento de la investigación, se realiza la revisión bibliográfica del objeto matemáticos, la epistemología del concepto y la parte cognitiva del estudiante; también se describe la metodología para el diseño y la implementación de instrumentos de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción matemática mediante la revisión exhaustiva de los contenidos de propuestas curriculares. Las fases en la cual se dividió este momento fueron: Revisión bibliográfica (estudio preliminar), diseño de unidades didácticas (articulación a las facetas del Teoría de la idoneidad de la didáctica), elección de la muestra de estudio, implementación y evaluación o análisis retrospectivo de las unidades didácticas, que fueron analizadas desde el punto de vista de las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva y ecológica, trabajos de campo y análisis de los resultados. Estas cuatro dimensiones se ven reflejadas en un estudio de caso con estudiantes de grado noveno, en una institución educativa del departamento del Quindío para la construcción y comprensión del concepto de medidas de dispersión y sus inferencias.

En el segundo momento de la investigación, se diseña y se implementa la metodología de la cual se hace referencia en este estudio de investigación, la cual busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático; dicho conocimiento didáctico hace referencia a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico.

Las unidades de análisis que se tuvieron en cuenta para dicha investigación son clasificadas según las facetas y dimensiones propuestas en la Teoría de la Idoneidad Didáctica que permitieron identificar normas e indicadores de idoneidad. Los dos momentos de esta investigación se realizaron en un contexto de estudiantes de básica secundaria, específicamente en grado 9, de la Institución Educativa Simón Bolívar, de Quimbaya – Quindío, con el apoyo y el suministro de datos del grupo GIOTUQ (Grupo de Investigación Observatorio Turístico Quimbaya).

.

PALABRAS CLAVE

Enfoque Ontosemiótico, aprendizaje, estudiantes, análisis, valoración, idoneidad, didáctica, trayectoria didáctica, enseñanza, aprendizaje, dispersión, pensamiento aleatorio, facetas, dimensiones, epistémico, cognitivo, ecológico, afectivo.

ABSTRACT

This research work focuses on the development and implementation of the theory of didactic suitability proposed in the Ontosemiótico Approach of Knowledge and Mathematical Instruction (EOS). This research has two great moments: in the first moment of the investigation, the bibliographical review of the mathematical object, the epistemology of the concept and the cognitive part of the student is carried out; It also describes the methodology for the design and implementation of instruments for assessing the didactic suitability of mathematical instruction processes by exhaustively reviewing the contents of curricular proposals. The phases in which this moment was divided were: Bibliographic review (preliminary study), design of didactic units (articulation to the facets of the Theory of the suitability of the didactics), election of the study sample, implementation and evaluation or retrospective analysis of the didactic units, which were analyzed from the point of view of the epistemic, cognitive, affective and ecological dimensions, field work and analysis of the results. These four dimensions are reflected in a case study with ninth-grade students in an educational institution in the department of Quindío for the construction and understanding of the concept of dispersion measures and their inferences.

In the second stage of the research, the methodology is designed and implemented, which is referred to in this research study, which seeks to create knowledge about how mathematical knowledge is constructed and communicated; This didactic knowledge refers to a theoretical approach, which serves as a basis for the different phases of the methodological process.

The units of analysis that were taken into account for this research are classified according to the facets and dimensions proposed in the Theory of Didactic Suitability that allowed identifying standards and indicators of suitability. The two moments of this research were carried out in a context of secondary school students, specifically in grade 9, of the Simón Bolívar Educational

Institution, Quimbaya - Quindío, with the support and data supply of the GIOTUQ group (Observatory Research Group Tourist Quimbaya).

KEYWORDS

Ontosemiotic focus, learning, students, analysis, assessment, suitability, didactic, didactic trajectory, teaching, learning, dispersion, random thinking, facets, dimensions, epistemic, cognitive, ecological, affective.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMÁGENES

LISTA DE FOTOGRAFÍAS

LISTA DE ILUSTRACIONES Y DIAGRAMAS

CAPITULO I
CONCEPTO DE DISPERSIÓN Y ALGUNAS APLICACIONES EN CONTEXTOS.

1.1 Introducción

En el desarrollo de este capítulo, daremos un preámbulo a los pre saberes y a la historia que concierne al objeto matemático, en lo antropológico, social y matemático. Además de las nociones, conceptos, significados que ha tomado las medidas de dispersión a través de la evolución de su aprendizaje, durante la institucionalidad del concepto del objeto matemático.

Por mucho tiempo, la palabra *estadística* se refería a información numérica sobre los estados o territorios políticos. La palabra viene del latín "*statisticus*" que significa "del estado". Las estadísticas como las conocemos hoy día tomaron en desarrollarse varios siglos y marcaron muchas mentes privilegiadas (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006).

La estadística es una colección de métodos para planificar y realizar experimentos, obtener datos y luego analizar, interpretar y formular una conclusión basada en esos datos. La estadística se puede definir como la ciencia que recopila, organiza, analiza e interpreta la información numérica o cualitativa, mejor conocida como datos, de manera que pueda llevar a conclusiones válidas (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006)

A partir de ello, la finalidad de este trabajo de investigación, es reportar y analizar los resultados obtenidos del desarrollo de prácticas matemáticas para el aprendizaje de parámetros, estadígrafos y medidas usadas en la estadística descriptiva, como son las medidas de dispersión, realizada en estudiantes de básica secundaria bajo el marco de un enfoque ontosemiótico. A través de esta investigación se logró realizar la configuración de estas prácticas para el aprendizaje del objeto matemático que son las medidas de dispersión y variabilidad en el pensamiento aleatorio y sobre las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica, al trabajar sobre el cálculo, análisis e interpretación de estas medidas.

1.2 Las medidas de dispersión en la estadística descriptiva

Las medidas de variabilidad, o comúnmente conocidas como medidas de dispersión, juegan junto a las medidas de centralización, posición y forma, un papel importante en el análisis de datos. La presencia de dispersión en valores, tanto poblacionales como muéstrales, es un hecho real presente en cualquier investigación. Al igual que sucede con cualquier conjunto de datos, la media, la mediana y la moda sólo nos revelan una parte de la información que necesitamos acerca de las características de los datos, mientras que la medidas de dispersión son características cuantitativas que nos indica que tan cercanos o lejanos se encuentran los valores unos de otros. Dichos valores pueden pertenecer a un conjunto de datos agrupados (distribuciones de frecuencias) o no agrupados (ordenados de acuerdo con su magnitud).
Para el caso de esta investigación, las medidas de dispersión que serán objeto de estudio son: *el rango, la desviación media, la varianza, la desviación estándar, y el coeficiente de variación*. En este orden de ideas, algunas de estas medidas de dispersión utilizan la media aritmética como referencia, como son desviación media, desviación estándar y varianza. Es así que se hace necesario que, para aumentar nuestro entendimiento del patrón de los datos, debemos medir también su dispersión, extensión o variabilidad.

La dispersión es importante porque:

- Proporciona información adicional que permite juzgar la confiabilidad de la medida de tendencia central. Si los datos se encuentran ampliamente dispersos, la posición central es menos representativa de los datos.
- Ayudan a distinguir problemas característicos para datos ampliamente dispersos. Debemos ser capaces de distinguir que presentan esa dispersión antes de abordar esos problemas.
- En el caso de una distribución de datos, con una amplia dispersión de valores con respecto al centro de distribución o que estos presentan riesgos inaceptables, permite tener la habilidad de reconocerlo y evitar escoger distribuciones que tengan las dispersiones más grandes (Gonzalez, s.f.).

1.3 Conocimiento del concepto de dispersión

El objetivo principal de la investigación es favorecer a través prácticas matemáticas y aplicación de unidades didácticas en el aula, contextualizadas con situaciones o cuestiones problemas del entorno social, fortalecer el aprendizaje de las medidas de dispersión situados en el pensamiento aleatorio para estudiantes de educación básica secundaria, desde las actividades de trabajos de campo relacionados con el turístico en el marco de un enfoque ontosemiótico.

La investigación se centra en estudiar y analizar los problemas relativos al proceso de aprendizaje de las medidas de dispersión para los estudiantes de básica secundaria, específicamente en el grado 9, puesto que toma como punto de referencia las dificultades que tienen los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas como el razonamiento y la resolución de problemas en el pensamiento **(**componente**)** aleatorio desde el concepto de dispersión y tendencias, pensando en los lineamientos curriculares que exige el MEN **(**Ministerio de Educación Nacional**)**, los DBA **(**Derechos Básicos de Aprendizaje, Versión 2**)** para este grado y las pruebas externas como las Saber 3,5,9.

La dificultad que se percibe de los estudiantes con respecto a la concepción de dispersión, asociada a los conceptos de la inferencia estadística, puede ser resuelta hoy en día a través de un ambiente computacional, resultando así más atractivo si se trabaja en contextos de datos reales (Sánchez, Borim y Coutinho, 2011). De esta forma, mediante un razonamiento informal, el estudiante desarrolla los conceptos necesarios para comprender, por ejemplo, el efecto directo que tiene un aumento o disminución del tamaño muestral en la precisión de la estimación de los parámetros poblacionales mediante intervalos de confianza, de un modo más sencillo e intuitivo (Batanero C. , y otros, 2006).

Esta es una investigación que está enfocada al campo de la Educación Matemática. Por ende, debe estar cimentada desde las correspondientes teorías que permitan conocer el tratamiento de los procesos que van a hacer parte fundamental de la estructura del trabajo, así pues, se trabajará bajo el marco teórico del “enfoque ontosemiótico”, en donde, ha aflorado dentro de la Didáctica de las Matemáticas. (Godino, Batanero, & Font, 2004, pág. 24).

1.4 Investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estadística

En esta sección, consideramos algunos estudios que valoran el conocimiento del contenido estadístico que profesores de matemáticas en ejercicio o en formación de educación primaria y primeros niveles de educación secundaria poseen con respecto a objetos estadísticos presentes en los currículos escolares. En nuestro caso, las investigaciones que versan sobre temáticas del currículo escolar de educación primaria son asociadas al *conocimiento común* del contenido y las que tratan objetivos del currículo de educación secundaria, al *conocimiento avanzado.* En ambos casos las investigaciones se conectan con uno o más aspectos de la faceta epistémica (conceptos, lenguajes, propiedades,…) del conocimiento del profesor en el modelo del conocimiento didáctico – matemático del profesor propuesto en el EOS. (Ossa Nieto & Aldana Bermúdez, 2017).

Uno de los temas de la estadística sobre los cuáles versan las investigaciones revisadas son las medidas de tendencia central (media, mediana y moda). En relación con estos contenidos destacan los estudios realizados por Batanero, Godino y Navas (1997); Estrada, Batanero y Fortuny (2004); Groth y Bergner (2006); y Jacobbe (2008).

En Jacobbe (2008) se presentan los resultados de un estudio de casos con tres profesoras de la escuela primaria en el que explora su comprensión sobre la media y la mediana. Dos de estas tres maestras manifestaron falta de conocimiento en el procedimiento para calcular la mediana (uno de los errores fue no ordenar los números de menor a mayor), dificultades para explicar lo que estas medidas de tendencia central representan al momento de proporcionar ejemplos en los que la mediana sería más informativa que la media para una situación dada, y una de las profesoras no comprende la diferencia entre la media y la mediana.

Otras investigaciones analizan simultáneamente el uso de las medidas de tendencia central y de dispersión. Entre estos trabajos están los realizados por Borim y Queiroz (2008), Makar y Confrey (2005) y Silva y Coutinho (2008).

Borim y Queiroz (2008), realizaron una investigación que estuvo enfocada en estudiar el razonamiento acerca de la variabilidad en maestros de matemática de secundaria (Nieto, 2017).

Silva y Coutinho (2008), realizaron una investigación con profesores brasileños y analizaron su razonamiento sobre dispersión. En el estudio se pidió a los profesores aplicar una encuesta y usar los datos obtenidos sobre la edad de los participantes para crear su distribución. Una vez que resumieron los datos en tablas de frecuencias y gráficos (un histograma), se les solicitó analizar distintos modos de representar el conjunto de las edades. Ningún profesor integró en su razonamiento el significado de la media conjuntamente con el significado de la desviación típica, lo cual limita la enseñanza de estos contenidos al uso de los algoritmos.

CAPÍTULO II

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

2.1 Introducción

En este capítulo, se estable el problema de investigación articulándolo al objeto matemático que estamos estudiando, tiendo en cuenta el contexto social y el entorno académico y de escuela. A partir de allí, formulamos la pregunta al problema de investigación y establecemos los objetivos tanto generales como específicos, en la cual nos permitirá adentrar y seguir sigilosamente el desarrollo de la investigación, hasta llegar al objetivo final propuesto.

La matemática en el ámbito social de las ciencias aplicadas es una propuesta educativa que reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que lo requiere, aborda la fase curricular, didáctica, cognitiva, epistemológica.

Planteado en los DBA (Derechos Básicos de Aprendizaje, Versión 2) y con base en el análisis de Estándares Curriculares (Estándares Básicos de Competencia, Mayo de 2006), para matemáticas, se puede apreciar que se hace necesario conceder prioridad al desarrollo del pensamiento aleatorio, en los conceptos de desviación, posición, variabilidad y dispersión, pues son considerados núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) de acuerdo con los lineamientos curriculares, propone en el desarrollo del pensamiento aleatorio como un logro para alcanzar en la educación básica, de esta forma el concepto de medidas de dispersión inicia su estudio en el comportamiento de un conjunto de datos obtenidos a partir de estudios estadísticos y trabajos de campo que nos permitirá caracterizar, cuantificar y medir los comportamiento sociales y económicos de nuestra región.

Dado que el razonamiento inferencial parte de los datos para detectar tendencias o fuentes de variabilidad con el fin de extrapolar los datos y realizar inferencias de muestras a poblaciones, el alumno deberá comprender los instrumentos necesarios para conseguir tal objetivo (Batanero C. , y otros, 2006, pág. 10).

Sin embargo, la adaptación a los nuevos conceptos y razonamientos, relacionados con las medidas de dispersión, conllevan a ciertas dificultades de entendimiento (Vallecillos Jimenez & Batanero Bernabeu, 1995) (Castro Sotos & Noortgate, 2007).

2.2 Problema de investigación

Desde las experiencias en las prácticas en el aula y trabajos de campo en el grado noveno, se ha podido apreciar las dificultades que tienen los estudiantes sobre la claridad en los conceptos que conciernen a las medidas de dispersión y variabilidad debido a las estrategias o metodologías de estudio. En síntesis, se explica la teoría básica y varios ejemplos, luego los estudiantes generalmente trabajan en grupos para resolver las guías de trabajo, las cuales se encuentran clasificadas por actividades y se resuelven de forma secuencial. Son pocos los alumnos que las resuelven mientras los otros copian los resultados y además los problemas se resuelven de forma mecánica sin fijarse en la naturaleza del ejercicio, situación o caso.

Al evaluar el proceso los resultados son bajos y las conceptualizaciones pobres.

A continuación un caso de estudio que nos servirá de diagnóstico sobre el aprendizajes y la aplicación de las medidas de dispersión.

2.2.1 Diagnostico

Situación 1. **Se toma el registro del valor de la pensión mensual (medido en miles de pesos) que reciben 30 jubilados turistas que ingresan a la región.**

450	1520	780	620	720	950
1530	1250	930	820	1050	630
538	770	640	1230	1400	1060
572	830	720	840	720	459
675	800	702	1020	1040	530

Tabla 1. Muestra de valores Pensión-Diagnostico. (Elaboración propia)

2.2.2 Tabla de distribución de frecuencias

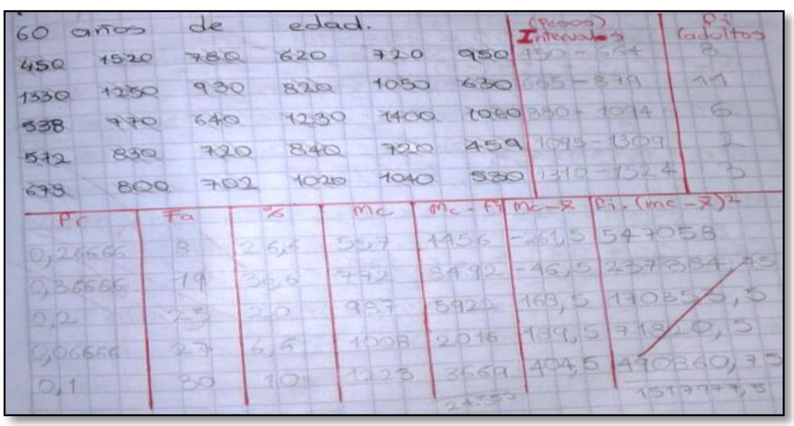
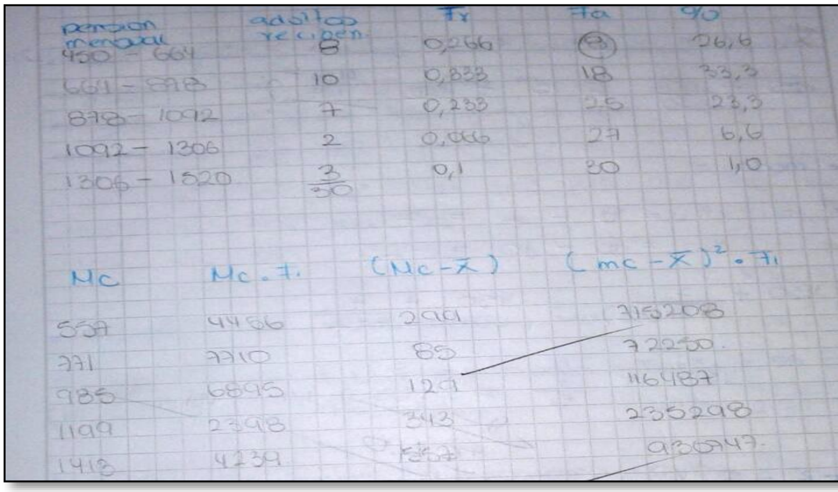


Imagen 1: Registro Tabla de Frecuencias Estudiante 1 (E1)

La estudiante E_1 realiza la T.D.F (Tabla de distribución de Frecuencias) de forma segura y completa. Entiende los conceptos y los procedimientos para completarla. Lo hacen bajos los mismos parámetros.

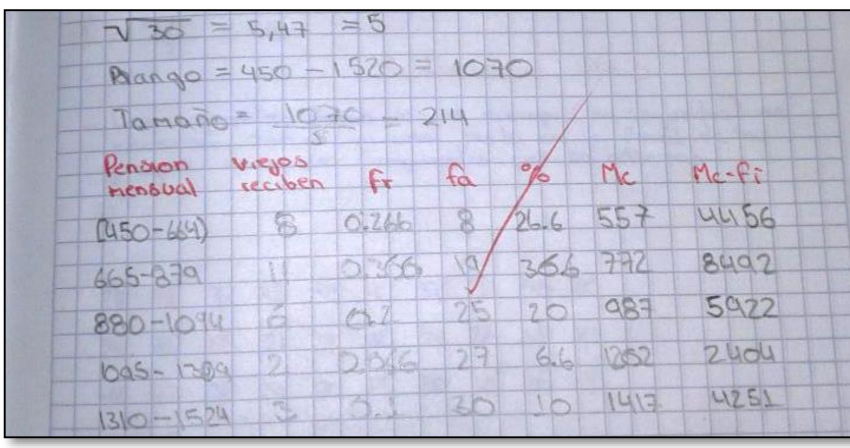


Pension mensual	adultos reciben	Fr	Fa	%
450 - 664	8	0,266	8	26,6
661 - 878	10	0,333	18	33,3
878 - 1092	7	0,233	25	23,3
1092 - 1306	2	0,066	27	6,6
1306 - 1520	3 / 30	0,1	30	1,0

Mc	Mc . fi	(Mc - $\bar{x}$)	(mc - $\bar{x}$)^2 . fi
557	4456	299	715208
771	7710	85	72250
985	6895	129	116487
1199	2398	343	235298
1413	4239	557	930747

Imagen 2: Registro Tabla de Frecuencias Estudiante 2 (E2).

El estudiante E_2 realiza la T.D.F de forma segura y completa. Entiende los conceptos y los procedimientos para completarla. Lo hacen bajos los mismos parámetros. Aunque con una nomenclatura distinta.



$\sqrt{30} = 5{,}47 = 5$

Rango = 450 - 1520 = 1070

Tamaño = $\frac{1070}{5}$ = 214

Pension mensual	viejos reciben	fr	fa	%	Mc	Mc·fi
(450-664)	8	0.266	8	26.6	557	4456
665-879	11	0.366	19	36.6	772	8492
880-1094	6	0.2	25	20	987	5922
1095-1309	2	0.066	27	6.6	1202	2404
1310-1524	3	0.1	30	10	1417	4251

Imagen 3: Registro Tabla de Frecuencias Estudiante 3 (E3).

El estudiante E_3 no realiza la T.D.F de forma completa. Entiende los conceptos y los procedimientos para completarla, pero no realiza la construcción de otras columnas en la tabla que son indispensables para el cálculo de las medidas de dispersión. Aunque lo hace con una nomenclatura distinta.

2.2.3 Cálculo de las medidas de dispersión.

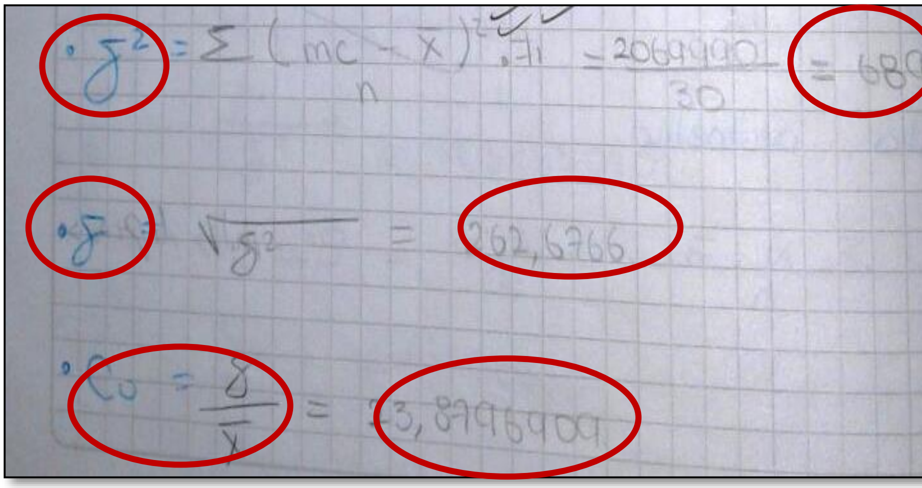


Imagen 4 Cálculo de las medidas de dispersión Estudiante E1.

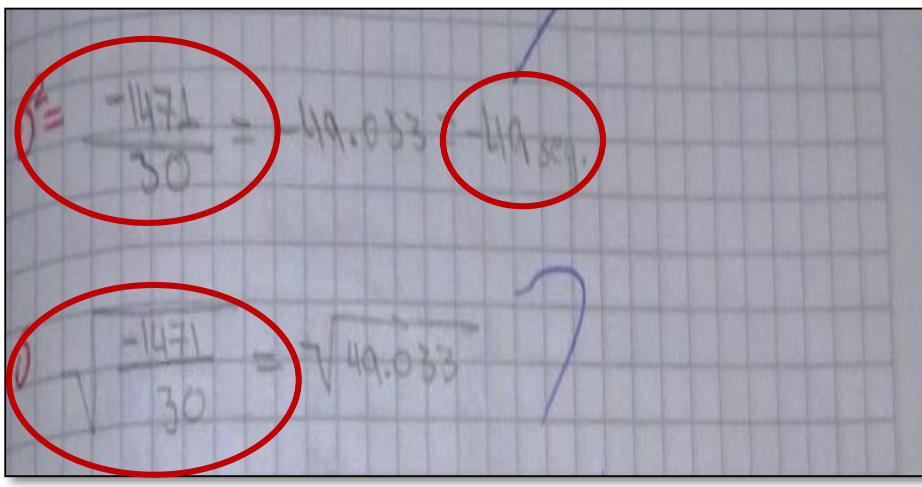


Imagen 5 Cálculo de las medidas de dispersión Estudiante E2

2.2.4 Resultados.

Se puede observar, que los 2 estudiantes cuyo trabajo hemos analizado, tienen la capacidad de calcular las tres medidas de dispersión pero no todo el conjunto de estudiantes lo hacen, es así que podemos evidenciar que hay dificultades con el manejo de signos y operaciones de potenciación y radicación. Además, de un conflicto en la representación y manejo de símbolos.

Como se aprecia en las imágenes, un estudiante trabaja la varianza y la desviación estándar con “sigma”, mientras el otro estudiante los hace con “S”, que es lo más convencional. Además a los resultados no les ponen las unidades correspondientes (cuando amerite)…por tanto no puede haber una buena interpretación de estos resultados. Así pues, son cálculos mecánicos que carecen fundamento y no sobresale el propósito del porqué y para qué se hacen los cálculos estadísticos.

2.3 Formulación del problema

A partir de los resultados obtenidos desde los diagnósticos de los 3 estudiantes, asumimos la postura, de iniciar una investigación relacionada con el manejo del concepto de centralización y dispersión, su significado e inmersión en contextos reales. Además de las prácticas realizadas en el aula hasta el momento, para fortalecer el aprendizaje, el manejo del objeto matemático e institucionalizar el concepto de dispersión. A partir de allí, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo generar en el estudiante de básica secundaria el desarrollo de prácticas matemáticas para el aprendizaje y aplicación de las medidas de dispersión desde las actividades de trabajos de campo situados desde el sector turístico en el marco de un enfoque ontosemiótico?

2.4 Objetivos de la Investigación.

2.4.1 Objetivo general

Fortalecer las prácticas matemáticas a partir del diseño e implementación de unidades didácticas para el aprendizaje de las medidas de dispersión ubicadas en el pensamiento aleatorio para estudiantes de educación básica secundaria, orientadas a trabajos de campo situados en el sector turístico mediante el marco del Enfoque Ontosemiótico.

2.4.2 Objetivos específicos.

- Configurar la dimensión epistémica desde la teoría de la idoneidad didáctica, para el aprendizaje del objeto matemático mediante referentes teóricos y pre saberes en estudiantes de básica secundaria.
- Potenciar la dimensión cognitiva, en la teoría de la idoneidad didáctica, el concepto del objeto matemático para su aprendizaje por estudiantes de básica secundaria mediante la aplicación de instrumentos.
- Reforzar las facetas ecológica y afectiva, mediante la implicación y adaptación del objeto matemático, desde la idoneidad didáctica para el aprendizaje en estudiantes de básica secundaria mediante trabajos de campo y las unidades didácticas.
- Realizar análisis y validación de los resultados obtenidos en los trabajos de campo, para determinar el aprendizaje de las medidas de dispersión como medida de impacto en el sector turístico.
- Realizar la construcción de la institucionalidad del concepto de dispersión, basado en la configuración de la trayectoria epistémica del objeto matemático, desde los resultados obtenidos en la investigación por parte de los estudiantes de la básica secundaria.

2.5 Justificación

La dificultad con la que nos encontramos a diario, al desarrollar los contenidos de estadística en nuestras clases y al analizar los resultados poco satisfactorios que observamos, nos llevan a reflexionar acerca de los fenómenos y razones relacionados con la enseñanza de las estadística descriptiva, sobre todo, los relacionados con la naturaleza, formas y condiciones del conocimiento de las medidas de dispersión.

Se plantean que algunos estudiantes no manejan el significado de las medidas de desviación, los símbolos lo han aprendido formalmente, ya que, aparte de ignorar el significado de las fórmulas y conceptos, inventan significados o confunden la terminología o las fórmulas que sustituyen a los auténticos. (Arzarello, Bazinni, & Chiapinni, 1995).

Por tal motivo, este trabajo es una investigación que tiene como enfoque principal fortalecer las competencias de resolución y razonamiento en el pensamiento aleatorio y sobre las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica al trabajar sobre el cálculo, análisis e interpretación de las medidas de dispersión.

Por lo tanto nuestro propósito en esta investigación consiste en observar los procesos, prácticas y el desarrollo de la competencia matemática de resolución y razonamiento situada en el pensamiento aleatorio involucrado en el aprendizaje de los estudiantes; además, de indagar sobre las dificultades y errores más comunes que surgen en este contexto. La falta de conocimiento y poco interés que tienen los estudiantes hoy en día en estadística ha sido considerada siempre la causa principal de los problemas relativos al aprendizaje; sin embargo, cada día cobra mayor importancia la necesidad de lograr un tipo de enseñanza que tenga presente ante todo, la construcción activa del conocimiento matemático y estadístico por parte de los estudiantes.

Durante el desarrollo de la investigación se logra estudiar y analizar los problemas relativos al proceso de enseñanza de las matemáticas, en específicos los conceptos estadísticos, en los estudiantes de básica secundaria, puesto que toma como punto de referencia las dificultades que en el desarrollo de competencias matemáticas como la representación en el pensamiento aleatorio desde el concepto de dispersión y tendencias; el interés surge para mejorar el saber en los conceptos matemáticos.

También se hace visible las dificultades que tienen los estudiantes en la tabulación de los datos, organización e interpretación al estar asociados a imágenes débiles de los conceptos matemáticos y manejo de los conceptos básicos en un nivel exclusivamente algorítmico y/o memorístico. Cabe aclarar que si el estudiante no conoce de los conceptos básicos de la estadística, la construcción de tablas y organización de los datos y las medidas apropiadas, se les será más dificultoso desarrollar el aprendizaje de las medidas de dispersión. Es necesario señalar que, aunque son varios los estudiantes que aprenden a realizar los cálculos necesarios para obtener estimaciones de los parámetros puntualmente, por intervalos o por test de hipótesis, no siempre consiguen comprender todos los procesos ni los conceptos que llevan a cabo dichos cálculos. Este hecho, con origen en las enseñanzas de bachillerato, perdura en el ámbito universitario, lo cual nos advierte de la importancia que supone una introducción óptima de los conceptos inferenciales.

La Didáctica de las Matemáticas aporta conocimientos descriptivos y explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos que ayuden a comprender dichos procesos. En este trabajo se mostró que la noción de idoneidad didáctica introducida en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática y el sistema de indicadores empíricos que la desarrollan, pueden ser el punto de partida de una teoría de la instrucción matemática orientada hacia la mejora progresiva de la enseñanza es estos estudiantes (Godino J. , 2010).

2.5.1 La Estadística en un contexto turístico cafetero.

La declaración del Paisaje Cultural Cafetero y el que Quimbaya se encuentre dentro de él, ha permitido que el turismo tenga un auge cada vez mayor en el departamento del Quindío y por lo tanto en Quimbaya. Esto llevó a la institución a la articulación de la formación académica con una modalidad en turismo, dando respuesta a las necesidades del contexto donde se encuentra la institución, es por esto que cada vez se hace más necesario tener claridad sobre lo que el turismo verdaderamente exige en Quimbaya, cual es la respuesta que la institución debe dar a la exigencia del contexto, qué aspectos son importantes tener en cuenta en el momento de formar a nuestros jóvenes para que verdaderamente sean competentes en su región, es por esto que vemos en el observatorio turístico un campo de acción que puede llegar a dar respuesta a estas necesidad tanto de la institución educativa, como del municipio y de la región. El creciente interés por el turismo en el departamento del Quindío y en su municipio Quimbaya, unido a algunas dificultades desde algunas administraciones para medir su impacto, ha resaltado el problema de la falta de información para evaluar y analizar el comportamiento del sistema turístico. Esto como producto de un débil sistema de información en Quimbaya que logre articular todas las variables de la oferta, la demanda, la superestructura[1] y el producto turístico, sumado al hecho que la inversión en investigación, desarrollo e innovación en el turismo ha sido escasa, y a una desarticulación interdisciplinaria en la gestión del turismo departamental y municipal. Teniendo en cuenta lo anterior, se evidencia en el municipio la necesidad de un instrumento o proceso que permita la obtención y oferta de datos confiables sobre el aporte del

---

[1] Superestructura turística, entendida como el conjunto de instituciones públicas o privadas, así como los procesos de mercadeo del producto turístico.

turismo a la economía, y conocimiento de los principales mercados, lo que permita una oportuna y adecuada articulación entre las estrategias de mercadeo y la realidad del destino.
En el ámbito del turismo la información[2] es el activo intangible más importante que puede tener cualquier organización, tanto de orden gubernamental como empresarial, ya que la correcta toma de decisiones y la planeación asertiva dependen de ésta (Gutierrez, Lopez, & Cañas, Observatorio Turistico Quimbaya, 2015, pág. 5).

Además están establecidos en los Estándares Básicos de Competencia, las medidas de dispersión como un tema obligatorio dentro del diseño curricular institucional y lo cual lo establece de la siguiente manera "**Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría**" (Nacional, Estándares Básicos de Competencias, 2003, págs. 87-88).

También aparece descrito en los derechos básicos de aprendizaje en donde los estudiantes de básica secundaria en grado noveno deben: "**Proponer un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y los cuartiles".** (Nacional, Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016, págs. 71-72)

[2] El concepto "información" que se trata en el del texto se refiere a la información obtenida con el rigor conceptual y metodológico exigido, en el tratamiento de los datos desde la recolección, la tabulación y el análisis, de tal manera que tenga validez.

CAPITULO III
ESTADO DEL ARTE, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

3.1 Introducción

En este capítulo de la investigación, nos centraremos en los diferentes trabajos realizados sobre el estudio de la estadística descriptiva, las medidas de dispersión y los aportes realizados desde las teorías de la didáctica, teoría de las situaciones didácticas, instrucción matemática y las teorías de la idoneidad de la didáctica. Además se describe la metodología y el diseño metodológico que se siguió y se contempló para cumplir con las finalidades de nuestra investigación.

3.2 Estado del arte.

La estadística puede definirse como la ciencia que trata y estudia todos los datos susceptibles de estudio y análisis para el Estado y es por esto que desde la antigüedad, los Estados ha recogido diversos tipos de datos de los habitantes del país con el fin de recaudar impuestos y organizar ejércitos. (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006).

Ésta es la razón de que la terminología que se emplea está basada en conceptos tales como población o individuo, que recuerdan claramente su origen. Con la organización de los Estados modernos a partir del renacimiento, la estadística ha tenido un interés creciente y un desarrollo constante (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006).

A partir de esa época se realiza censo de población cada cierto tiempo y de manera cada vez más sistemática, se recogen distintos tipos de datos de carácter económico o social (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006).

Hasta el siglo XIX la estadística era solo una ciencia "*descriptiva*", que utilizaba resúmenes numéricos y gráficos para comunicarse, pero a partir de esa época se va organizando un cuerpo de conocimientos teóricos que permiten avanzar conclusiones para una población más amplia que la analizada, realiza inferencias y toma decisiones en situaciones de incertidumbre (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006).

Son los conocimientos estadísticos los que permitirán, en todos los casos, sacar conclusiones socialmente útiles de los datos obtenidos de la observación sistemática, de la experiencia, ya sea para diseñar campañas de prevención de consumo, orientaciones a población juvenil sobre elección de estudios (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006), impactos sociales y económicos que puede generar diferentes actividades como la turística en una región o contemplar planes de mejoramientos, infraestructura y contingencia según los datos recopilados e información arrojada.

Las medidas de variabilidad, o comúnmente conocidas como medidas de dispersión, juegan junto a las medidas centrales, posición y forma, un papel importante en el análisis de datos. La presencia de dispersión en valores, tanto poblacionales como muestrales, es un hecho real presente en cualquier investigación. Estepa & del Pino (2013) justifican la importancia que tiene la dispersión citando a Cobb & Moore (1997), quienes indican que los datos no son sólo números, sino que son números con un contexto.

El estudio de dichas medidas alcanza una gran relevancia en la formación estadística. Por ejemplo, Snee (1990) establece que el estudio de la dispersión es un concepto fundamental en estadística. Otros autores, como Wild & Pfannkuch (1999) indican que este tipo de medidas adquieren gran relevancia como uno de los componentes básicos en el pensamiento estadístico. En este sentido, Moore (1990, p. 135) lista cinco elementos fundamentales en el pensamiento estadístico, de los cuales tres están asociados a la variabilidad aleatoria: (1) percepción de su ubicuidad en el mundo que nos rodea; (2) competencia para su explicación, identificando los factores de las que depende; (3) habilidad de cuantificarla que implica comprender y saber aplicar el concepto de dispersión. Aunque, tal y como han puesto de manifiesto Sánchez, Borim y Coutinho (2011), la dispersión es un tema fundamental dentro de la estadística, las investigaciones en Educación Estadística sobre estas son escasas (Batanero C. , y otros, 2006).

Entre los objetivos planteados para las matemáticas se incluye el de utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones del entorno y su representación en forma gráfica y numérica para permitir formarse un juicios sobre misma (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006).

3.2.1 Cuestiones didácticas sobre el aprendizaje del concepto de media y desviación estándar.

Ante cualquier estudio estadístico, independiente del contexto donde será desarrollado y aplicado, es importante tener claro los conceptos y su significado de los elementos con que trabaja la estadística descriptiva, que luego nos permitirá realizar el análisis y la interpretación de estos, para generar las inferencias que deseamos enfocarnos.

Datos. Los datos son la materia prima de la estadística. Para este propósito se puede definir a los datos como números. Las dos clases de números que se utilizan en estadística son números que resultan de la toma –en el sentido literal del término- de medidas, y aquellos que resultan del proceso del conteo (Wayne, 2012). ***Encuesta***. Si los datos necesarios para contestar una pregunta no están disponibles a partir de los registros almacenados de manera rutinaria, la fuente lógica puede ser una encuesta. Las encuestas son los instrumentos más apropiados para la recopilación y recolección de datos que se obtienen de una población determinística y por la cual después de un proceso investigativo nos genera información apropiada (Wayne, 2012). ***Variable***. Una característica se clasifica como variable si, tal como se observa, se encuentra que ésta forma diferentes valores en diferentes personas, lugares o cosas. Esto se hace por la simple razón de que la característica no es la misma cuando se observa en diferentes sujetos. Existe diferentes tipos de variables, entre ellas la variable cuantitativa y variable cualitativa. Una variable cuantitativa es aquella que puede medirse en la forma usual. Se puede obtener a través de mediciones. Una variable cualitativa son características que no pueden ser medibles como lo son las cuantitativas. Estas establecen clasificación, opinión, preferencias o gustos. ***Población***. Habitualmente se considera una población como una colección de entidades, por lo general personas. Sin embrago, una población o colección de entidades puede estar compuesta de animales, máquinas, plantas o células. Si se toma la medida de alguna variable para cada una de las entidades en una población, se obtiene una población de valores para esta variable. (Wayne, 2012).

Muestra. Una muestra puede definirse simplemente como una parte de la población.

El Concepto de media

En un concepto tan aparentemente sencillo, como el de media aritmética hay que considerar, sin embargo, distintos aspectos generales cuya comprensión es necesaria para el estudiante y que una correcta planificación de la enseñanza deberá tener en cuenta:

- Dado un conjunto de datos “comprender” el papel y la necesidad de un dato “central”.
- Comprender el efecto que tiene sobre la media el cambio de uno o más datos.
- Cómo determinar un conjunto de datos que tenga una media dada de antemano.
  (Vallecillos, Castro M., Florés M., & Fernando G., 2006)

3.2.2 Medidas de dispersión

Las medidas de posición de un conjunto de datos por sí solas pueden ser confusas, ya que los valores extremos de la distribución pueden introducir grandes variaciones en ellas que las hagan poco representativas o incluso invalidas. La información proporcionada por estas medidas ha de ser completada con la proporcionalidad por la que midan la dispersión o variabilidad de los datos.

La dispersión de un conjunto de observaciones se refiere a la variedad que muestran éstas. Una medida de dispersión conlleva información respecto a la cantidad total de variabilidad presente en un conjunto de datos. Si todos los valores son iguales, no hay dispersión, pero si no todos son iguales, entonces existe dispersión en los datos. La magnitud de la dispersión es pequeña cuando los valores, aunque diferentes, son cercanos entre sí.

El rango. Es la medida de dispersión más elemental, la diferencia entre las dos observaciones extremas, o sea, la diferencia entre los valores mayor y menor de un conjunto de datos.

$R = X_M - X_m$, *donde R representa el rango,* X_M *el dato mayor y* X_m *el dato menor.*

La varianza. Cuando los valores de un conjunto de observaciones se encuentran ubicados cerca de su media, la dispersión es menor que cuando están esparcidos. En consecuencia, se puede pensar intuitivamente que es posible medir la dispersión en función del esparcimiento de los valores alrededor de su media. Esta medición se efectúa mediante lo que se conoce como variancia. En general, la varianza de un conjunto de N datos x_i, con frecuencias respectivas f_i y media $\bar{x}$, pueden calcularse utilizando la siguiente expresión:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} fi(x_i - \bar{x})^2$$

Desviación media. Puede definirse como la media aritmética de las desviaciones de cada uno de los valores con respecto a la media aritmética de la distribución y se indica así:

$$\boxed{DM = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{N}}$$

Nótese que se toman las desviaciones en valor absoluto, es decir, que la fórmula no distingue si la diferencia de cada valor de la variable con la media es en más (+) o en menos (-) (Batanero, Lopez, & Lopez, 2006).

La desviación estándar. Es la medida de dispersión más conocida y usada, en combinación con la media como medida central. La idea clave a comprender es la de "desviación con respecto a la media". Si se toma a ésta como dato central de referencia, las "distancias" de cada uno de los datos a ella, dará una buena descripción de la dispersión del conjunto total de datos.

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2} \qquad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

La suma de todas las diferencias de cada uno de los datos con la media es siempre cero ya que las diferencias positivas y negativas se compensan. Por esta razón no es posible utilizar la media de estas diferencias, ya que siempre será cero. Si se elevan las diferencias al cuadrado los resultados son siempre números positivos (Batanero, Lopez, & Lopez, 2006).

Coeficiente de variación. La desviación estándar es útil como medida de variación en un determinado conjunto de datos. Sin embargo, cuando se quiere comparar la dispersión de dos conjuntos dados, la comparación de las dos desviaciones estándar puede dar un resultado equivocado. Esto puede ocurrir si las dos variables involucradas tienen medidas en diferentes unidades.

Lo que se necesita en situaciones como esta es una medida de variancia relativa en lugar de una variancia absoluta. Tal medida la constituye el coeficiente de variación, el cual expresa la desviación estándar como un porcentaje de la media. Por lo tanto está definido bajo la siguiente formula.

$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = \frac{S}{\bar{X}}(100)$$

Al igual que sucede con cualquier conjunto de datos, la media, la mediana y la moda sólo nos revelan una parte de la información que necesitamos acerca de las características de los datos. Para aumentar nuestro entendimiento del patrón de los datos, debemos medir también su dispersión, extensión o variabilidad.

Por eso, la dispersión se considera que es importante porque:

- Proporciona información adicional que permite juzgar la confiabilidad de la medida de tendencia central. Si los datos se encuentran ampliamente dispersos, la posición central es menos representativa de los datos.
- Ya que existen problemas característicos para datos ampliamente dispersos, debemos ser capaces de distinguir que presentan esa dispersión antes de abordar esos problemas.

A pesar de la gran importancia de las medidas de tendencia central y de la cantidad de información que aportan individualmente, no hay que dejar de señalar que en muchas ocasiones esa información, no sólo no es completa, sino que puede inducir a errores en su interpretación. Es por esto que la finalidad del estudio es analizar cómo se trata la dispersión dentro de la estadística descriptiva, generando análisis inferencial, con el fin de orientar a los estudiantes en el aprendizaje y la implementación de prácticas matemáticas en el cálculo de las medidas de dispersión y su interpretación tanto en el aula de clase como en su contexto.

A partir de allí, analizar los problemas relativos al proceso de enseñanza de la estadística, puesto que toma como punto de referencia las dificultades que tienen los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas como la representación, interpretación y razonamiento en el pensamiento aleatorio desde el concepto de dispersión y tendencias.

El interés surge para potenciar y fortalecer el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Batanero C. , 2000). Durante la ejecución de dicha investigación, consistió en hacer un análisis didáctico de los conceptos de medidas de dispersión bajo el marco de un enfoque ontosemiótico y fortalecido mediante prácticas matemáticas sustentadas en trabajos de campo encaminados hacia el sector turístico.

De esta forma, mediante un razonamiento informal el estudiante desarrolla los conceptos necesarios para comprender, por ejemplo, el efecto directo que tiene un aumento o disminución del tamaño muestral en la precisión de la estimación de los parámetros poblacionales mediante intervalos de confianza, de un modo más sencillo e intuitivo. Como recursos de apoyo para los procesos de enseñanza-aprendizaje destacamos las posibilidades de los simuladores. Estas herramientas digitales sirven de apoyo en los procesos de transferencia de conocimiento permitiendo asimilar de una forma más correcta los conceptos estadísticos. En diferentes ventanas el simulador representa la distribución poblacional (izquierda-superior), la distribución de datos en la última muestra simulada (derecha-superior), la distribución muestral empírica de todas las medias que se van obteniendo en sucesivas muestras (izquierda – inferior) y la misma distribución muestral estandarizada, que se va aproximando a la distribución normal n (0,1) cuando se repite el proceso de muestreo (Batanero C. , y otros, 2006).

3.2.3 La Didáctica de las Matemáticas como campo de investigación y acción.

La Didáctica de las Matemáticas como campo de investigación ha adquirido una cierta consolidación a nivel internacional, como muestran diversos indicadores (revistas, congresos, colectivos académicos, etc.).

Sin embargo, se reconoce un cierto divorcio entre los resultados de las investigaciones académicas y las prácticas de la enseñanza de las matemáticas. Una de las razones de esta separación puede ser el énfasis de las investigaciones en planteamientos descriptivos de aspectos parciales de los problemas educativos (psicológicos, sociológicos, epistemológicos, políticos, etc.), dejando de lado el componente tecnológico de la educación matemática.

Hay múltiples investigaciones que describen los diversos factores que condicionan las decisiones del profesor (conocimientos, creencias, valores,…) en los momentos de diseño, implementación y evaluación, aunque pocas de ellas abordan la articulación conjunta de estos factores. Se trata de estudios cognitivos sobre el pensamiento humano en la resolución de problemas. En concreto, Schoenfeld (1998) centra su atención en esta cuestión: "Algo ha sucedido. ¿Qué hará el profesor a continuación y (lo que es más importante) por qué?". La acción efectiva sobre los problemas reales de la clase requiere desarrollar teorías instruccionales específicas que ayuden al profesor en la toma de decisiones en las fases de diseño, implementación y evaluación. Se precisa elaborar teorías educativas que articulen las facetas epistémica y ecológica (teorías curriculares), junto con teorías del aprendizaje (facetas cognitiva y afectiva) y teorías orientadas al diseño instruccional, esto es, a la práctica de la enseñanza.

El enfoque de la Didáctica de las Matemáticas como una "*ciencia de diseño*" es resaltado por diversos autores (Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2010). Por ejemplo, Lesh y Sriramn (2010, p. 124) reflexionan sobre la naturaleza del campo de investigación de la educación matemática, planteándose estas cuestiones: ¿Deberían los educadores matemáticos pensar sobre sí mismos como siendo psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían considerar como los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras? ¿O más bien se deberían considerar como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares – y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales como también por la necesidad de elaborar teorías relevantes?

La posición defendida por estos autores es considerar la educación matemática en este último sentido, o sea, como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. "Nuestra visión del diseño en la investigación educativa se basa, en parte, en las semejanzas y paralelismos entre la educación y la ingeniería como campos que simultáneamente buscan avanzar el conocimiento, resolver problemas humanos, y desarrollar productos para su uso en la práctica" (Hjalmarson y Lesh, 2008, p. 526).

Lesh y Sriraman (2010, p. 124) atribuyen la siguiente característica a las "*ciencias de diseño*", las cuales consideran relevantes para la educación matemática lo siguiente:

a) Los temas que se investigan tienden a ser parcialmente productos de la creatividad humana. Los sistemas que los científicos de diseño (ingenieros) necesitan comprender y explicar tienden a ser parcial o completamente diseñados, desarrollados o construidos por las personas.

b) Los temas que se investigan son (o incorporan) sistemas complejos. Estos sistemas pueden ser artefactos o herramientas concretas (recursos que apoyan la enseñanza, el aprendizaje o la evaluación), o sistemas conceptuales que explican el pensamiento de los estudiantes, los profesores, los diseñadores del currículo u otros agentes educativos.

c) Los investigadores deben diseñar para lograr poder usar conjuntamente con otros y reutilizar en otras situaciones.

d) Los temas que se deben comprender están cambiando continuamente - y de igual modo lo hacen los sistemas conceptuales requeridos para comprenderlos y explicarlos.

e) Los temas que se investigan están influenciados por restricciones y aportes sociales.

f) No es probable que una única “gran teoría” proporcione soluciones realistas a problemas realistas complejos.

g) El desarrollo usualmente implica una serie de ciclos iterativos de diseño.

En el campo de la Didáctica General y para áreas específicas se han desarrollado una variedad de modelos y teorías de diseño educativo. “Una teoría de diseño educativo es una teoría que ofrece una guía explícita sobre la mejor forma de ayudar a que la gente aprenda y se desarrolle. Están dirigidas a la práctica y describen métodos educativos y las situaciones en las que dichos métodos deberían utilizarse.

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje nos lleva a ser extremadamente precavidos en la proposición de normas y reglas para la intervención en los sistemas didácticos. Ciertamente no disponemos de recetas de cómo enseñar, pero esto no significa que no tengamos ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes. Consideramos razonable aceptar la siguiente hipótesis metodológica: Fijadas unas circunstancias (sujetos, recursos, restricciones,…), un “experto” en una didáctica específica puede razonar (apoyándose en resultados teóricos contrastados empíricamente) que ciertas tareas y modos de interacción en el aula son preferibles a otras diferentes. (Jacme & Ciem, 2011) .

3.2.4 Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática.

La última intención de la investigación en didáctica, es encontrar dispositivos "óptimos" para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos, teniendo en cuenta las restricciones institucionales de las dimensiones cognitiva, epistémica e instruccional. La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto. Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que son quienes en última instancia deben poner en marcha dichos recursos (Godino & Batanero B., 2014).

A partir de allí, hablaremos de unas de las idoneidades que se desarrollaran en esta investigación, teniendo en cuenta también las dimensiones que queremos fortalecer:

1. Idoneidad epistémica: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).
2. Idoneidad cognitiva: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotsky, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordaje teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos humanos, entre otros.
3. Idoneidad instruccional: las configuraciones y trayectorias didácticas posibilitan que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (*a priori*), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (*a posteriori*), para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos disponibles, que determinan restricciones institucionales de carácter matemático y didáctico).

3.2.5 Descripción del proceso instruccional observado

El objetivo de la enseñanza observada consiste en que los estudiantes recuerden, interpreten y formalicen las definiciones de correspondencia, función, rango, dominio y tipos de funciones, aplicándolas en una situación que pone en juego conocimientos de la física: el lanzamiento vertical hacia arriba de una pelota con una velocidad inicial. Se supone que los alumnos han estudiado previamente las definiciones de dichas nociones y se acepta que la tarea matemática es un "ejercicio de aplicación". Implícitamente, el profesor presupone que los estudiantes son capaces de interpretar estas definiciones, de realizar una *generalización disyuntiva* (Tall, 1991, p.12) y, de esta forma, identificar los componentes esenciales de la función parabólica que modeliza la situación física y utilizar el significado aprendido como instrumento para la realización de la tarea propuesta. (Godino, Wilhelmi, & Bencomo, 2005).

En el análisis de la dimensión cognitiva es preciso tener en cuenta los procesos sociales de construcción y comunicación de los objetos matemáticos. Las restricciones institucionales (de personal, materiales y de tiempo) determinan un marco para el análisis y la determinación de la dimensión cognitiva: ***"lo cognitivo" no es sinónimo de "proceso mental"***. (Godino, Wilhelmi, & Bencomo, 2005).

Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad v_0 por lo que su altura t segundos después, es $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ metros, donde g es la aceleración de la gravedad. Si se lanza la pelota con una velocidad de 32 m / s y $g = 10\ m / s^2$ (aprox.):

1. Determinen la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de $y(t)$.
2. ¿Es $y(t)$ una relación o una función? Si es una función, ¿cuál es su dominio, codominio y rango?
3. ¿Es $y(t)$ una función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva?
4. Si $w(t) = 10 - 2t$ es la velocidad de desintegración de la pelota, ¿a qué altura llegará, ahora, al cabo de tres (3) segundos? Calcule la función compuesta $(y \lceil w)(3)$.
5. Al cabo de cuanto tiempo regresará la pelota al lanzarla con una velocidad de 32 m / s?
6. ¿Qué velocidad hay que dar a la pelota para que alcance una altura máxima de 100 m.
7. ¿Qué altura alcanzará la pelota y qué velocidad hay que imprimirle para que regrese a los seis segundos?

Tabla 2 Cuestiones propuestas a los estudiantes. (Godino, Wilhelmi, & Bencomo, Conflictos epistemicos en un Proceso de Esudio de la Nocion de Funcion. Implicaciones para la formacion de profesores, 2005*)*

En esta investigación, que se está analizando las cuestiones propuestas se dedicaron cuatro clases de 45 minutos. El profesor organizó el proceso de estudio dividiendo la clase en equipos de cuatro alumnos, asignando a cada uno de ellos una parte de la tarea. Un alumno de cada grupo explicó al resto de la clase la solución encontrada en el seno del grupo. El profesor completaba o corregía la explicación del alumno. La *trayectoria didáctica implementada*, es decir, la secuencia de modos de gestión de los significados implementados a propósito de un objeto matemático específico (modelización de una situación física mediante una función), incluye, por tanto, configuraciones de tipo *cooperativo*, *dialógico* y *magistral* (Godino, 2003, pp.202–204).

3.2.6 Conflictos epistémicos en un proceso de instrucción matemática

Para valorar la idoneidad y pertinencia de un proceso de estudio matemático tenemos en cuenta tres dimensiones: *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (relativa a los significados personales) e *instruccional* (relativa a las intervenciones del director de estudio y a la disponibilidad y utilización de recursos materiales y de tiempo).

Un proceso de instrucción es idóneo desde el punto de vista epistémico si el significado implementado es fiel al significado pretendido y éste, a su vez, lo es al de referencia(Godino, Wilhelmi, & Bencomo, 2005). En muchas ocasiones, en un proceso de estudio matemático, es posible identificar algún desajuste fundamental entre los significados institucionales de referencia y pretendido con el implementado, que no han sido previstas *a priori* como constituyentes del proceso instruccional y que representan decisiones didácticas desafortunadas. Llamamos *conflictos epistémicos* a todos estos desajustes, los cuales condicionan el proceso de estudio y los aprendizajes de los estudiantes. Estas decisiones son de tres tipos según el agente gestor del significado: el *director de estudio* (en la implementación del significado institucional), la *institución* (en la determinación del significado pretendido a partir del de referencia), la *noosfera* (en la identificación del significado de referencia a partir del significado cultural asociado al objeto matemático —noción, propiedad, argumento, etc.). (Godino, Wilhelmi, & Bencomo, Conflictos epistemicos en un Proceso de Esudio de la Nocion de Funcion. Implicaciones para la formacion de profesores, 2005).

De manera similar, teniendo en cuenta la definición de idoneidad de cada una de las dimensiones, se define “conflictos *cognitivo*” y “conflicto *instruccional*”.

La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión evaluada. Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados que propone Godino (2003) es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su puesta en escena. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática.

La valoración de la idoneidad de un proceso instruccional requiere registrar un complejo de informaciones sobre el estado y evolución de los distintos componentes y dimensiones que lo definen. Es necesario, por tanto, usar diversos métodos y técnicas de observación, registro y medida de datos (cuestionarios, entrevistas, grabaciones audio-visuales, etc.) y determinar los estados cognitivos de los estudiantes en diferentes momentos del proceso instruccional. Los datos de que disponemos para el análisis del proceso instruccional que usamos como ejemplo ilustrativo son: por un lado, el programa general de la asignatura y libros de texto recomendados (*significado institucional de referencia local*); por otro lado, la guía de tareas a realizar (*significado institucional pretendido*); y, por último, la grabación audio-visual del desarrollo de las cuatro clases (*significado institucional implementado*). Basándonos en este material, y utilizando la metodología descrita en Godino (2003), analizamos la idoneidad epistémica del proceso instruccional observado.

3.2.7 Tipos de conflictos epistémicos

Según la especificidad del conflicto epistémico con relación al sistema de prácticas operativas y discursivas relativas al objeto matemático que se desea introducir o desarrollar, los conflictos los clasificamos en generales y específicos.

Se tiene un *conflicto epistémico general* cuando se refiere a un proceso matemático (definición, demostración, interpretación, etc.) no específico de la clase de problemas de la que emerge el objeto. En caso contrario, llamamos *específico* al conflicto epistémico. La identificación de un conflicto, general o específico, supone la observación de un desajuste fundamental entre dos *entidades praxémicas* (problemas o acciones), entre dos *entidades discursivas* (conceptos, propiedades o argumentos) o entre dos *juegos de lenguaje* que se introducen o desarrollan en dos marcos institucionales relacionados. Estos desajustes se identifican en la utilización (*acción*), la construcción (*acciones-argumentaciones*) y la comunicación (*lenguaje-argumentación*) de nociones, proposiciones y problemas. De hecho, los problemas, acciones, lenguaje, nociones, proposiciones y argumentos (como entidades constituyentes de los significados institucionales y personales) son los *observables* que permiten hacer operativos los criterios de idoneidad y, por lo tanto, valorar un proceso instruccional. Además, estos desajustes se pueden describir en términos de las cinco *facetas cognitivas duales*: personal - institucional, ejemplar - tipo, ostensivo - no ostensivo, elemental - sistémico, expresión – contenido**.** En la trayectoria epistémica se distinguen secuencias en las cuales existen conflictos epistémicos, que no obedecen a intervenciones establecidas a priori por el profesor y cuyo objetivo podría ser que los estudiantes superaran un *obstáculo cognitivo.*

Desde el punto de vista educativo, no es suficiente un conocimiento formal del objeto función, centrado en el componente discursivo; el diseño de las tareas instruccionales y la implementación de una *trayectoria didáctica* idónea requiere del profesor un conocimiento profundo de los diversos significados de los objetos matemáticos. El análisis de la dimensión epistémica que hemos realizado del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función ha mostrado la utilidad y pertinencia de las herramientas teóricas aplicadas. La comparación entre el significado de referencia de la noción de función y algunos elementos del significado implementado en el proceso instruccional nos ha permitido identificar las concordancias y desajustes (conflictos epistémicos) entre ambos significados, y por tanto, valorar el grado de idoneidad epistémica. Teniendo en cuenta los conflictos epistémicos identificados podemos valorar la idoneidad epistémica del proceso de estudio observado como “mejorable”. El desarrollo del proceso de estudio ha tenido numerosos puntos críticos cuando se ha abordado la discriminación del modelo formal de función (correspondencia entre conjuntos) y las relaciones entre este modelo con los modelos tabular, gráfico y expresión analítica. No obstante, nos parece adecuado comenzar con cuestiones de predicción, como motivación primaria de la función, usando el lenguaje gráfico (“*Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de y (t)*”). El análisis epistemológico de los objetos matemáticos, realizado con un enfoque y herramientas conceptuales apropiadas, debe ser un objetivo esencial en la formación del profesor de matemática. Las descripciones y las interpretaciones que hemos realizado de los mismos, usando algunas nociones de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003), tienen consecuencias para la formación de profesores. Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión amplia, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica).

Así mismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes (idoneidad cognitiva), identificar y resolver los conflictos semióticos que aparecen en todo proceso de estudio, empleando los recursos materiales y temporales necesarios (idoneidad instruccional). Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos. (Godino, Wilhelmi, & Bencomo, Conflictos epistemicos en un Proceso de Esudio de la Nocion de Funcion. Implicaciones para la formacion de profesores, 2005).

El análisis realizado en esta investigación se fundamenta sobre las ideas del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero, & Font, 2004), que asume que los objetos matemáticos surgen de las prácticas (acciones u operaciones) como respuesta a situaciones problemáticas extra o intra matemáticas. En este enfoque, el término “objeto matemático” tiene un significado muy amplio y puede verse como el conjunto de prácticas asociadas a dicho objeto y puede ser asimismo institucional y personal. De acuerdo con nuestro referente teórico, las prácticas matemáticas se caracterizan mediante los objetos que intervienen en ellas, que pueden ser de diferente naturaleza: situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Todos estos objetos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, que serán epistémicas si son propias de una institución matemática o de enseñanza y cognitivas si son específicas del estudiante. El aprendizaje del estudiante depende sustancialmente del significado institucional presentado en la enseñanza, por lo que es importante analizar el significado institucional de referencia fijado en las directrices curriculares para poder prever las posibles dificultades del aprendizaje del estudiante (Batanero C. , y otros, 2006). Para nuestro caso, el trabajo es un estudio de tipo teórico.

Ayudar a los niños y jóvenes a comprender progresivamente las ideas estocásticas fundamentales no es una tarea sencilla, puesto que es necesario adaptar estas ideas a sus capacidades cognitivas y diseñar situaciones didácticas que propicien el aprendizaje significativo.

La estadística es enseñada, tradicionalmente, como parte de la asignatura de matemáticas por el profesor de esta materia. Nos encontramos con la paradoja de pedir a estos profesores que impartan un nuevo contenido, para el que no todos han tenido una formación didáctica específica, porque la didáctica de la estadística no está aun suficientemente desarrollada. Mientras que la estadística como ciencia, está en un periodo de notable expansión, el número de investigaciones sobre la enseñanza de la estadística es aún escaso, y sólo estamos comenzando a conocer las principales dificultades de los alumnos en los conceptos más importantes. Es también preciso experimentar y evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza específica de la estadística, a la que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de las matemáticas (Batanero C. , 2000).

Dado que las medidas de dispersión son cruciales en la enseñanza de la estadística, presentamos algunas aplicaciones dinámicas utilizables para su exploración de esos conceptos en las clases. En la primera parte de este trabajo resaltamos la importancia de utilizar la visualización como estímulo para introducir y explorar la variación estadística usando la tecnología actual disponible. Además, al mejorar la motivación de los alumnos en clase, se subsanan dificultades y errores relacionados con su interpretación y comprensión (Martins, 2013).

La enseñanza de la estadística es un tema actual que requiere innovaciones y cambios en las formas tradicionales de formación, producción y comunicación de la información. Según (Darius, Michiels y Raeymaekers, 2002, p.1) con el uso de herramientas tecnológicas surgen nuevas posibilidades de enseñanza, con las cuales es posible proporcionar a los alumnos una experiencia diferente, que permita un aprendizaje más eficiente y eficaz. La Estadística es una parte de la matemática donde es posible desarrollar la visualización dinámica de muchos conceptos (Martins y Nascimento, 2009). Además si tenemos en cuenta las enormes potencialidades de la exploración gráfica y visual del entorno tecnológico actual, es natural considerar la visualización como un aspecto extraordinariamente importante tanto en la

construcción y la transmisión de conceptos, como en el descubrimiento de nuevas relaciones, Guzmán (2001). Evidentemente la visualización es una componente más en la continua tentativa de mejorar la enseñanza de la estadística, siendo necesaria una gran labor de reflexión e investigación para adecuarla a la enseñanza de conceptos específicos (Martins, 2013). A pesar de la importancia de la variación estadística, su tratamiento en los programas escolares se reduce a dar una pequeña interpretación basada en la búsqueda de una medida que indique la dispersión de los datos (Barros & Fernández, 2001) y (Estepa & Pino, 2013); después de lo cual se procede a deducir las fórmulas correspondientes: desviación media, varianza y desviación estándar.
El problema es que al aplicar la fórmula para encontrar el valor de la varianza o desviación estándar, no se refleja en modo alguno el concepto de variación.

Algunas de las explicaciones para esta situación sugeridas por Shaughnessy (1997) son:

- El cálculo e interpretación no son muy fáciles.
- La carencia de modelos didácticos para dar significado a las medidas de variación, a diferencia de modelos que sirven para motivar los conceptos de medidas centrales (balanza, punto de equilibrio, etc.).

Por todo esto, deberíamos considerar a la variación estadística como un concepto central de la investigación científica y nos debe llevar a una reflexión profunda sobre el papel que debe jugar esta noción en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. El concepto de variación debe ser revalorado y utilizado en los programas de estadística; además el maestro debe prepararse para este cambio.

3.3 Marco Teórico

Como se ha mencionado anteriormente, el marco teórico en el cual se apoya y se muestra como pilar de esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. También permite dar las orientaciones fundamentales de un conocimiento de contenido específicamente pedagógico; y es a partir de estos conocimientos y capacidades que los profesores trasladan su conocimiento de la materia en representaciones instructivas. “Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Este marco teórico trata de articular distintas aproximaciones a la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de supuestos de tipo antropológico y semiótico sobre la actividad matemática y los procesos de estudio correspondientes.

Figura 1: Dimensiones y Niveles del análisis didáctico (Godino, 2014)

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia (Godino J. , Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática; Motivación, sustentación, 2014).

3.3.1 Noción de idoneidad didáctica

Consideremos que el EOS, en particular la noción de idoneidad didáctica, puede aportar elementos originales y significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional, apropiada para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas curriculares. En este sentido Godino (2011) en su trabajo "*Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*" comparte la noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. (Nieto, 2017).

Consideramos que esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional (Teoría de la Idoneidad Didáctica) que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica – ecológica, cognitiva – afectiva, interaccional – mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. (Nieto, 2017).

Como hemos indicado, la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos, ha sido introducida a partir de un modelo explícito sobre el conocimiento matemático sobre bases pragmatistas - antropológicas. La introducción de la dualidad personal - institucional de los sistemas de prácticas y de las configuraciones de objetos y procesos permite aplicar sistemas de categorías similares para describir el conocimiento de los sujetos individuales y el conocimiento institucional, para el cual se postula un tipo de realidad objetiva, aunque culturalmente relativa (Godino J. , Enfoque Ontosemiotico, 2014). Otra noción clave del EOS es la de significado, entendido como contenido de las funciones semióticas, o relaciones entre objetos, configuraciones y sistemas de prácticas, la cual permite concebir el aprendizaje en términos de apropiación de significados. Con la noción de idoneidad didáctica tratamos de desarrollar algunas consecuencias del marco epistemológico y cognitivo del EOS para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas, lo que requiere asumir nuevos presupuestos relativos a las interacciones entre los sujetos, el uso de recursos tecnológicos y las relaciones ecológicas con el entorno. Las nociones de conflicto semiótico y la negociación de significados se adoptan como criterio principal de optimización de las interacciones. En la práctica no todos los objetivos de aprendizaje matemático se pueden lograr mediante procesos de adaptación en situaciones a-didácticas, hipótesis fundamental de la teoría de situaciones. Esto es así, no sólo porque la re-invención de todos los conocimientos matemáticos por parte de los alumnos requeriría un tiempo didáctico ilimitado, o porque exigiría unas capacidades intelectuales excepcionales por parte de los alumnos, sino porque el componente discursivo, normativo y cultural de los conocimientos matemáticos requiere la implementación de momentos de institucionalización, en los que la enseñanza directa del profesor juega un papel esencial. La articulación entre las situaciones a-didácticas y didácticas, entre los conocimientos y saberes que pueden ser estudiados mediante una "enseñanza directa" y

los que podrían ser abordados mediante una construcción a-didáctica está lejos de ser obvia. Schneider ha planteado este problema de manera clara y directa: “¿Qué peso conceder al constructivismo?” (Schneider 2001, p. 53).
Nosotros consideramos que el EOS proporciona un marco en el que es posible estudiar la articulación de diversas teorías y analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico.

Para ello, ha sido necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos relacionados que permitan describir de una manera detallada las interacciones que ocurren en la clase de matemáticas. Las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, normas socio-matemáticas, aportadas por el interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995; Voigt, 1984; Godino y Llinares, 2000) son sin duda herramientas útiles para abordar esta problemática.

Por otro lado, nos parece necesario tener en cuenta nociones aportadas por teorías psicológicas del aprendizaje, como la zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1979) y los supuestos del aprendizaje verbal significativo basado en la recepción (Ausubel, 2000). Todos estos modelos teóricos pueden parecer incompatibles entre sí, pero una aproximación al estudio de los problemas didácticos desde un paradigma de complejidad sistémica, como el que propone Morin (1994), es posible encontrar complementariedades por encima de las divergencias aparentes. La teoría de la idoneidad didáctica trata de interrelacionar las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Las nociones de idoneidad epistémica y ecológica y el sistema de indicadores asociados constituyen el germen de una teoría curricular, mientras que los correspondientes a las facetas cognitiva – afectiva lo constituye para una teoría del aprendizaje. Las facetas interaccional y mediacional contienen, a su vez, el germen de una teoría de la enseñanza.

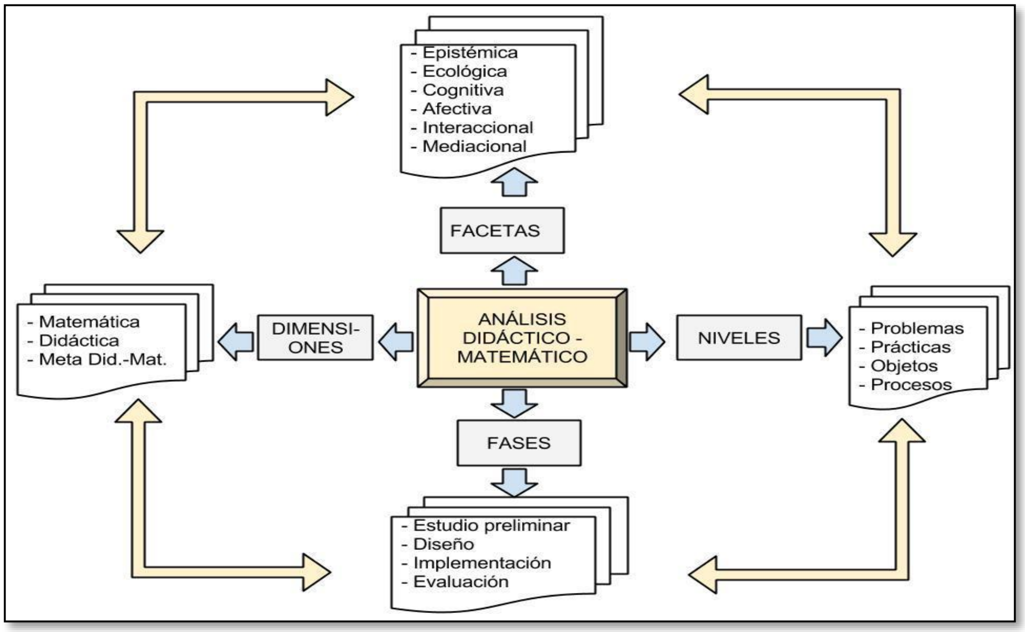


Figura 2: Focos de atención del análisis didáctico – matemático. (Godino & Batanero B., 2014)

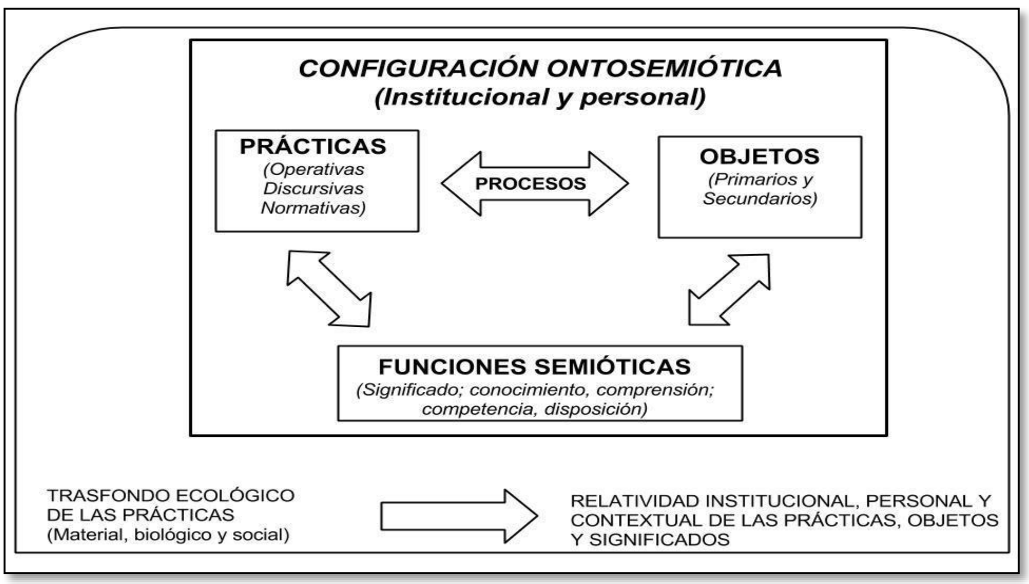


Figura 3: Entidades primarias de la ontología y epistemología del EOS. (Godino & Batanero B., 2014)

3.3.2 Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Consideramos *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento (Ley General de educación, 1994).

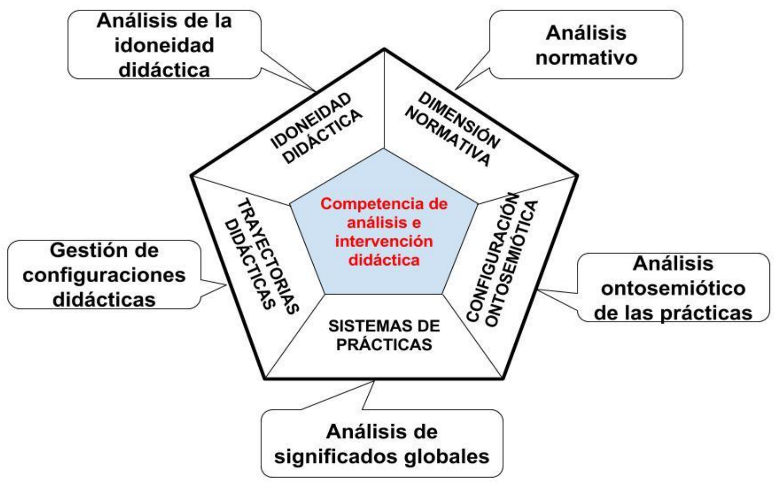


Figura 4: Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica. Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 295)

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puesta de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, ¿qué significa o representa la expresión “media aritmética”?, se propone como respuesta, “el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos”.

Con esta formulación del significado el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: “las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción” (Faerna, 1996; p. 14).

Figura 5: Significados sistémicos. (Godino J. , Enfoque Ontosemiotico, 2014)

La relatividad socio epistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados. Con relación a los significados institucionales proponemos tener en cuenta los siguientes tipos:

- **Implementado**: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- **Evaluado**: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- **Pretendido**: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- **Referencial**: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
Respecto de los significados personales proponemos los siguientes tipos:

- **Global:** corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.

- **Declarado**: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- **Logrado**: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

3.3.3 Emergencia de los objetos matemáticos

Tal como se ha dicho, en el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. Sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

3.3.4 Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. (Godino J. , Enfoque Ontosemiotico, 2014).

De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos.

Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias.

Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como "objetos personales".

En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumento.

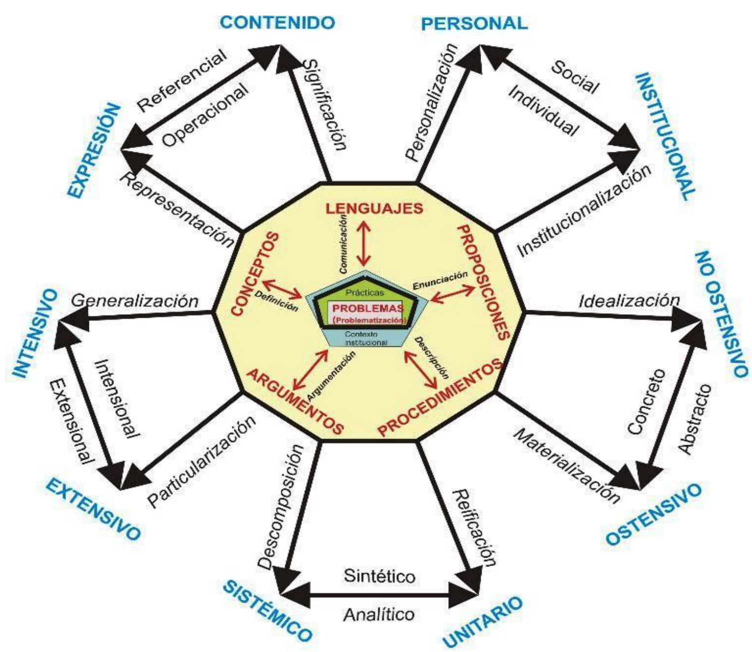


Figura 6: Configuración de objetos y procesos (Godino, 2014, p.23)

3.3.5 Configuración de objetos primario

Se propone pues la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).
- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...).
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...).

- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos,...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...). A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías,...

Las situaciones problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.).

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macro didáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: *situaciones – problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos*. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *socio-epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). (Ley General de educación, 1994).

Se amplía, así mismo, el "triángulo epistemológico" (Steinbring, 2006) (signo/símbolo, Objeto/contexto de referencia, concepto), especialmente al problematizar la noción de concepto e interpretar el "objeto/contexto de referencia" en términos de situaciones problemas.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, Batanero, & Font, 2004):

- ***Personal – institucional***.

Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino, Batanero, & Font, 2004).

La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas. La finalidad en esta faceta es construir la cognición matemática a través de los sistemas de prácticas a partir de una institución del objeto matemático y la interacción del sujeto en ciertos problemas y construir los objetos personas.

- ***Ostensivo – no ostensivo***. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica). Para nuestro caso, pensar en el objeto de estudio como la dispersión puede considerarse *no ostensivo*, ya que el significado del concepto de dispersión se puede considerar una metáfora en el lenguaje personal, "*que tan lejos está el elemento del centro…*". Sin embargo, pensar en la expresión matemática para calcular la dispersión de los datos, es un objeto institucional ostensivo, pero el estudiante puede crear su propio objeto ostensivo a través de estas actividades.

- ***Expresión – contenido***: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- ***Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo)***. La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje es por ejemplo el cálculo de la desviación media (promedio de desviaciones) $D_M = \frac{\sum(y_i - \bar{x})^2}{n}$ como un caso particular y una clase más general $D = (y_i - \bar{x})$ como la generalización de las desviaciones.

La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica (Otte, 2003, p. 187).

- ***Unitario – sistémico***. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

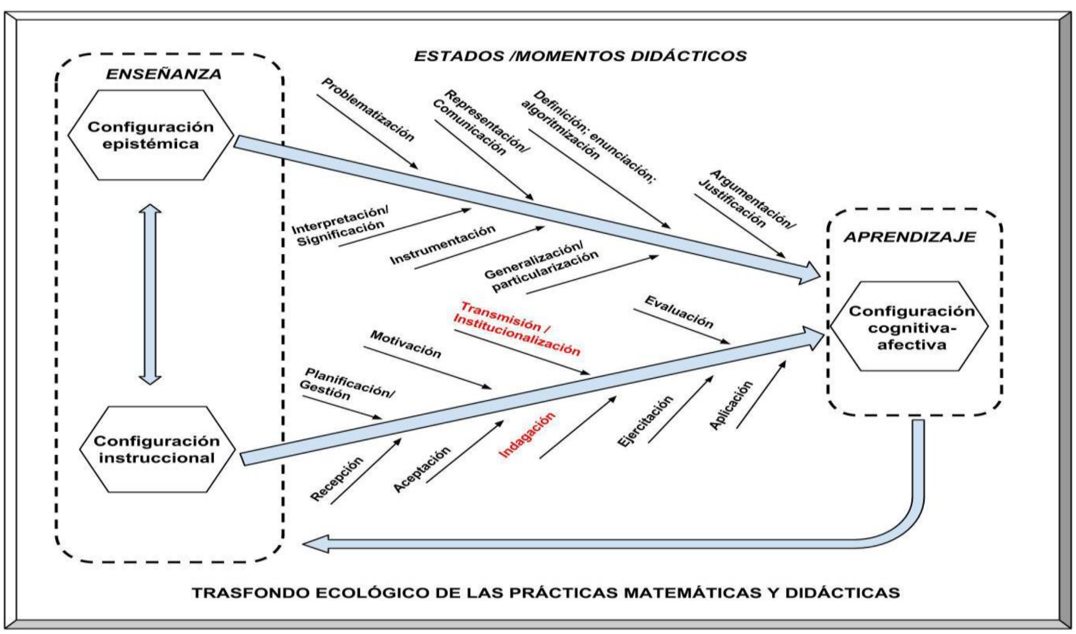


Figura 7 Componentes y dinámica interna de una configuración didáctica. (Godino, J. D., 2004).

La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

3.3.6 Comprensión y conocimiento en el EOS

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Font, 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental".

Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas). Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas (Godino, 2003). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Ramos y Font, 2008):

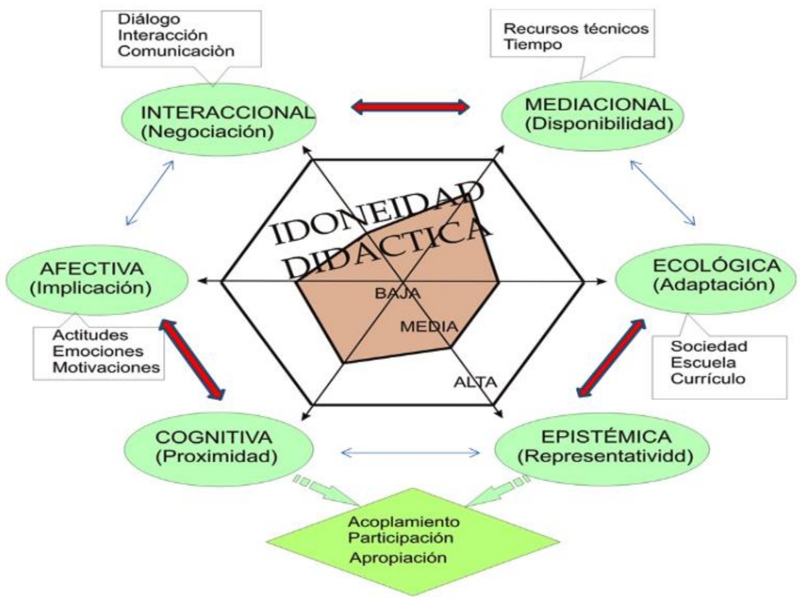


Figura 8: Componentes y criterios básicos de la idoneidad de la didáctica (Godino, J. D, 2014).

- **Idoneidad epistémica:** se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad) (Godino J. , 2010).
- **Idoneidad cognitiva:** expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotsky, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados. Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras,

que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números (Godino, Batanero, & Font, 2004).

- **Idoneidad emocional**: grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes (Ley General de educación, 1994).
- **Idoneidad ecológica**: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelm y Bencomo, 2005). Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

Estos niveles de análisis didácticos se describirán detalladamente en el transcurso de la investigación y desde el diseño metodológico. Las anteriores componentes se pueden fortalecer desde los Criterios de idoneidad didáctica.

- **Idoneidad interaccional:** un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1998) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes (Godino J. , Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática; Motivación, sustentación, 2014).

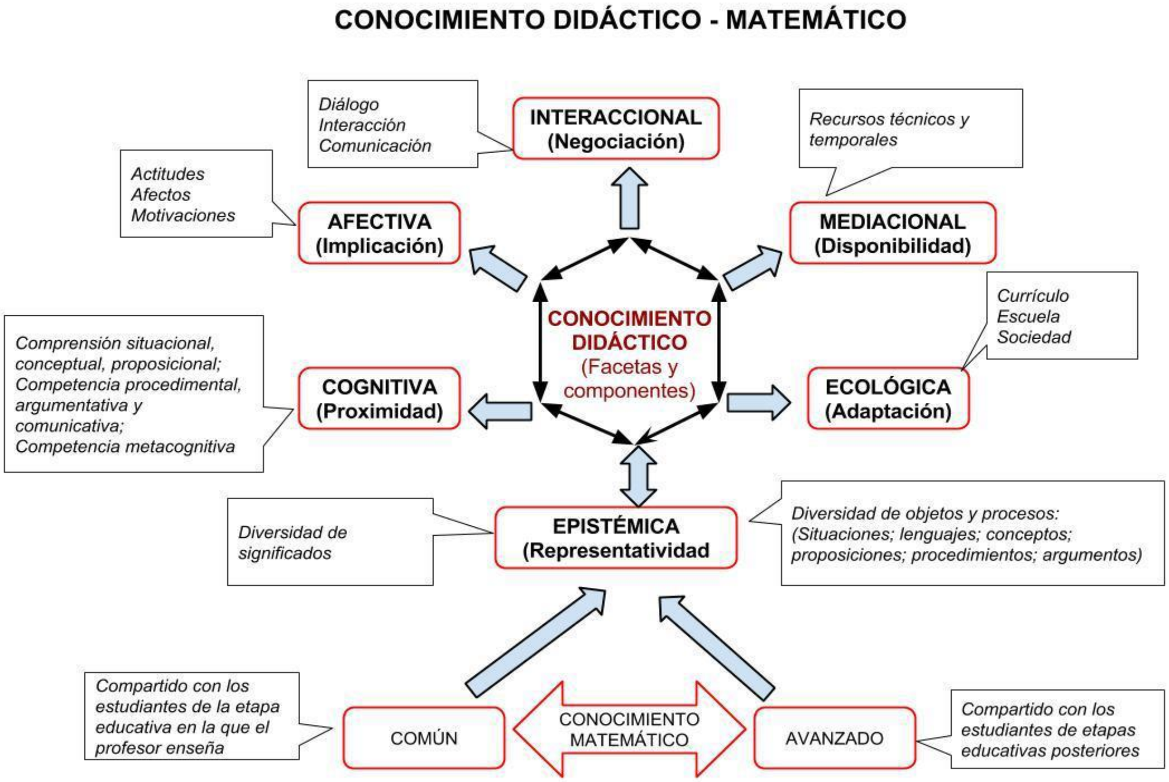
- **Idoneidad mediacional:** grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

3.3.7 Problema didáctico y marco conceptual

La ingeniería didáctica articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto.

Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que en última instancia deben poner en marcha dichos recursos (Wilhelmi, Bencomo, & Godino, 2006).

El objetivo en este trabajo es, en cierta forma, inverso al de la ingeniería didáctica: partiendo de realizaciones efectivas, evaluar la pertinencia de un proceso de instrucción matemática y determinar pautas para la mejora del diseño y de la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos.



Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada Indicadores de idoneidad didáctica.
Godino, J. D. (2014).

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular.

También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales. Para realizar una acción instruccional idónea se requiere disponer de directrices claras y explícitas sobre los fines y líneas generales de actuación. Metafóricamente, se trata de disponer del plano o croquis del territorio que se debe recorrer; pero es el profesor quien dirige la acción efectiva en el territorio, para lo cual debe disponer de medios para orientarse. La investigación educativa proporciona los sistemas de referencia, las metas a lograr y medios de “navegación”, pero las decisiones locales están bajo la responsabilidad del docente. (Godino, Wilhelmi, & Bencomo, Conflictos epistemicos en un Proceso de Esudio de la Nocion de Funcion. Implicaciones para la formacion de profesores, 2005).

Las circunstancias locales y temporales pueden hacer que la trayectoria idónea no sea la marcada a priori por las directrices externas, por las “leyes” o tendencias estadísticas; la acción instruccional está sujeta a variaciones locales, frecuentemente caóticas. El logro de una alta idoneidad didáctica de un proceso de estudio, como también su valoración, es un proceso sumamente complejo puesto que, como hemos visto, involucra diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, tanto las dimensiones como los componentes no son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos. En las definiciones presentadas de las distintas idoneidades parciales juega un papel central la noción de significado. El EOS proporciona herramientas para hacer operativa la noción de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas en que se puede descomponer un proceso de estudio matemático (Godino, Contreras y Font, 2006).

A continuación presentamos algunos indicadores de las distintas idoneidades parciales y de las interacciones entre las mismas, los cuales pueden servir de pauta o guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas o efectivamente implementadas. En estas secciones se amplía la “Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) y se relaciona con los criterios y principios propuestos en documentos curriculares y otras teorías usadas en educación matemática. (Wilhelmi, Bencomo, & Godino, 2006).

a. Idoneidad Epistémica

Como hemos indicado, entendemos que un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia. En la **tabla 3** incluimos los componentes y algunos indicadores relevantes que permiten hacer operativa dicha noción.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos
Argumentos	Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Tabla 3. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica. (Godino, 2010)

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas.

Esta posición es concordante con la “Teoría de Situaciones Didácticas” (Brousseu, 1997) y también con la “Educación Matemática Realista” (EMR) (Van den Heuvel - Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones. “La resolución de problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacer matemáticas.

Para Freudenthal (1991) las matemáticas son una actividad humana. “*No hay matemáticas sin matematización*”, actividad que puede ser de aplicación a resolver problemas del entorno, o problemas de reorganización del propio conocimiento matemático. (Godino & Batanero B., 2014)

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones. (Godino J. , 2010).

Esta posición concuerda con el “Principio de interconexión” de la “Educación Matemática Realista”: Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría,…) no pueden ser tratados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados. Además, la resolución de problemas de contexto ricos con frecuencia significa que tienes que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas. (Godino J. , 2010).

b. Idoneidad cognitiva

Definimos la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. La tabla 4 incluye los componentes e indicadores seleccionados.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones. (Godino J. , 2010)

Tabla 4: Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva. (Godino J. , 2010)

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase.

Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados.
Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

c. Idoneidad afectiva

La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

La tabla 5 incluye los componentes e indicadores seleccionados.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	- Las tareas tienen interés para los alumnos - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva. (Godino J. , 2010)

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida (Godino J. , 2010).

Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor (Godino J. , 2010).

d. Idoneidad ecológica.

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas.

El proceso de estudio tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y aplicar.

La educación matemática crítica (Skovsmose, 1994) aporta ideas para lograr que la educación matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, la práctica matemática puede ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, la matemática reducida a meros cálculos rutinarios puede reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro lado, la matemática en su sentido más amplio puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo. Otros componentes e indicadores de idoneidad ecológica se incluyen en la tabla 6, en particular las conexiones del contenido matemático con otras áreas curriculares, y entre distintas áreas temáticas dentro de la propia matemática.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica. (Godino J. , 2010)

e. Interacciones entre facetas

En los apartados anteriores hemos identificado algunos indicadores de idoneidad para las cuatro facetas que proponemos en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Dichas facetas no se deben considerar como factores independientes, ya que de hecho se producen interacciones entre las mismas.

Así, por ejemplo, el uso de un recurso tecnológico puede determinar que se puedan abordar determinados tipos de problemas y las configuraciones de objetos y procesos correspondientes, lo cual conlleva nuevas formas de representación, argumentación, generalización, etc. También se pueden ver afectadas las formas de interacción entre el profesor y los estudiantes, el interés y motivación, y en definitiva los aprendizajes.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Epistémica-ecológica	- El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	- El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. - Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. - Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y
Epistémica-cognitiva mediacional	- El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	- El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. - El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza.

Tabla 7. Componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas. (Godino J. , 2010)

Los objetos matemáticos intervienen y emergen de los sistemas de prácticas. Se consideran dos niveles de objetos, los *objetos primarios* y los *objetos secundarios.* A continuación se anexan los componentes de los objetos primarios están compuestos por:

- Situaciones-problemas, aplicaciones extra o intra matemáticas, tareas, ejercicios.
- Lenguajes, términos, expresiones, notaciones, gráficos,…
- Conceptos, introducidos mediante definiciones o descripciones.
- Proposiciones, enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…
- Argumentos, enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Ahora bien los objetos secundarios están compuestos por las siguientes facetas o dimensiones duales:

- *Expresión-contenido,* relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado).
- *Personal-institucional*, se consideran objetos personales los que emergen de sistemas de prácticas específicas a una persona, mientras que si los objetos emergen de sistemas de prácticas compartidas en el seno de una institución son entendidos como objetos institucionales.
- *No ostensivo-ostensivo,* los objetos ostensivos son aquellos objetos que se pueden mostrar a otros (notaciones, símbolos,…) y los no ostensivos son los no perceptibles por sí mismos (los objetos institucionales y personales).
- *Unitario-sistémico,* en algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias, supuestamente conocidas y en otras, se deben descomponer para su estudio.

En este sentido, las *situaciones problemáticas* están ocupando un lugar importante dentro de la investigación, son vistas como la razón de ser de la actividad matemática. Los objetos primarios amplían la distinción tradicional que se hace entre entidades conceptuales y procedimentales y se constituyen en una herramienta potente para describir los *objetos intervinientes* y *emergentes* de la actividad matemática. Así mismo, los objetos secundarios y los procesos permiten un análisis más detallado de la actividad matemática (Nieto, 2017).

"*las nociones de sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos permiten abordar los análisis epistemológicos y cognitivos en didáctica de las matemáticas según el marco del EOS. En particular, permiten caracterizar los conocimientos institucionales (componente epistémico) y los conocimientos personales (componente cognitivo)*". (Nieto, 2017).

Para nuestro caso en particular aplicamos principalmente las nociones de sistema de prácticas, objetos primarios y la noción de procesos como herramientas de análisis y descripción en el desarrollo de la ingeniería didáctica que abordamos en esta investigación.

3.3.8 Noción de hecho didáctico significativo

La noción de hecho didáctico significativo, complementa de manera eficaz las posibilidades de análisis realizadas a través las nociones de configuración y subconfiguración. En consecuencia, en el transcurso de una subconfiguración didáctica pueden ocurrir *hechos didácticos* que interesa analizar. Se define un "*hecho didáctico* como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los hechos que implican una cierta *regularidad explicable* en el marco de una teoría constituyen un *fenómeno"* (Wilhelm, Font y Godino, 2005).
En esta investigación se considera que un *hecho didáctico* es *significativo* si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función de acuerdo con el objetivo instruccional que se pretende. La significatividad debe ser entendida desde el punto de vista del docente, del estudiante, o mejor dicho desde el punto de vista institucional externo al sistema didáctico, en otras palabras, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional. Se pueden asimilar a fenómenos singulares ya que la interpretación se hace siempre desde una cierta teoría.

De este modo la noción de HDS se utiliza en el desarrollo de la ingeniería didáctica como criterio para seleccionar unidades de análisis y a la vez como herramienta para sintetizar e interpretar la trayectoria didáctica implementada.

3.3.9 Dimensión normativa

La noción de *dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos. Reconocer las normas que condicionan y hacen posible los procesos de estudio matemático han sido objeto de diversas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Tal es el caso de la noción de *contrato didáctico* (Brousseau, 1998), y de otras nociones basadas en el *interaccionismo simbólico* (Blumer, 1969), como *patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas* (Cobb y Bauersfeld, 1995). Lo más importante es tener en cuenta las reglas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como "microsociedad", que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes.

3.3.10 Conocimiento didáctico-matemático

En el estudio realizado por Godino (2009) se aplicaron dichas herramientas teóricas del EOS con el fin de elaborar un sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas que involucra el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Cuando el centro de atención son los conocimientos que el profesor de matemáticas debe poner en juego como líder y guia de un proceso de enseñanza y aprendizaje tales conocimientos incluyen los relativos a cada una de las seis facetas implicadas en tales procesos, como se indica en la figura 2.4. Además, el modelo incluye además las categorías relativas al conocimiento matemático común y avanzado (conocimiento en el horizonte matemático) introducidas en el modelo del MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008).

3.4 Diseño metodológico o plan de investigación.

Para dar cumplimiento al desarrollo de aprendizaje del objeto matemático se requiere realizar una investigación de carácter académico, descriptivo y documental, a través de la realización de trabajos de campo.

Para esto se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

3.4.1 Investigación descriptiva – cualitativa - cuantitativa: Como su nombre lo indica, permite describir las situaciones, los fenómenos o los eventos que nos interesan, midiéndolos, representado los resultados de una forma muy gráfica para observar los comportamientos y fluctuaciones de las respuestas y procedimientos dados, además evidenciando sus características. Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Danhke, (1989 citado por y Hernández, Fernández y Baptista, 2004). Con la articulación del manejo de variables cualitativas y cuantitativas, se busca la interpretación de los resultados obtenidos por cada uno de los ítems en cada una de las actividades.

3.4.2 Fases de la investigación: El desarrollo de la investigación estará dada por las siguientes fases:

Fase 1: Revisión bibliográfica

En la fase inicial de la investigación, se llevara a cabo un estudio de la literatura del objeto de investigación, para tener el conocimiento pertinente para analizar las respuestas, y sobre todo, el proceso que utilizaron para resolver el cuestionario, y así tener bases matemáticas y pedagógicas para su comparación y descripción de conclusiones.

Fase 2: Elección de la muestra

La selección de la muestra no será un hecho al azar. En la institución educativa Simón Bolívar del municipio de Quimbaya, se seleccionará la muestra entre los estudiantes de básica secundaria, específicamente a estudiantes de noveno grado (9°). Estudiantes con deferentes niveles de desempeño a la cual le haremos seguimiento del aprendizaje del objeto matemático. Los estudiantes se le harán la aplicación de las unidades didácticas dependiendo de las fases en la cual trabajaremos las dimensiones de la idoneidad de la didáctica.

Fase 3: Contextualizando el Trabajo de campo

El grupo de investigación GIOTUQ integra a los estudiantes de grado 9 y les hace acompañamiento durante la recolección y obtención de datos usando variables cualitativas y cuantitativas de la estadística descriptiva, a través de la aplicación de encuestas dirigidas a turistas en temporadas de receso estudiantil. De esta manera, el estudiante genera su propio instrumento estadística de recolección y determina la variable que hará parte de la investigación.

Fase 4: Diseño de las unidades didácticas.

Diseño de unidades didácticas como talleres de tipo evaluativo que contengan situaciones y enunciados de casos reales para ser aplicado a estudiantes de los grados 9°.

Los problemas presentes en el taller, se tendrá en cuenta cuatro niveles de desempeño, según lo estipulado por el ICFES en las calificaciones de pruebas SABER 3, 5 Y 9. Estos niveles de desempeño son: Insuficiente, Mínimo, Satisfactorio y Avanzado.

Fase 5: Aplicación de las secuencias didácticas (situaciones didácticas)

En esta fase se aplicara las unidades didácticas diseñadas para cada una de las fases, referentes a las facetas de la idoneidad de la didáctica, a los estudiantes de 9° de la Institución educativa Simón Bolívar.

Fase 6: Identificar, Analizar y Comparar

Sistematizar la información a través del uso de medios informáticos y tecnológicos para el análisis, comparación, interpretación de los resultados. Además realizar las tablas de frecuencias, gráficos estadísticos, cálculos de medidas de posición y dispersión para identificar los factores influyentes en la investigación.

3.5 Descripción y desarrollo de la metodología

3.5.1 Población de objeto de estudio

La investigación se desarrolló con estudiantes de grado 9 de la institución educativa Simón Bolívar del municipio de Quimbaya del departamento Quindío, con los cuales se hizo un análisis didáctico bajo el enfoque ontosemiótico del aprendizaje de las medidas de dispersión y los conceptos de rango, cuartiles, deciles, desviación, varianza y desviación estándar.

3.5.2 Descripción de la metodología:

La investigación consistió en hacer un análisis didáctico de los conceptos de medidas de dispersión bajo el marco de un enfoque ontosemiótico y fortalecido mediante prácticas matemáticas desarrolladas y sustentadas en trabajos de campo encaminados hacia el sector turístico. Antes de poner en marcha dicho análisis, se hizo una investigación más a fondo sobre la enseñanza de los objetos matemáticos de medidas de dispersión para así tener las herramientas necesarias para realizar dicho análisis didáctico. El análisis y la reflexión de los diferentes aspectos presentes en los procesos de enseñanza, hace parte fundamental de la labor como docente. La necesidad de dar respuesta a muchos aspectos que dificultan la enseñanza de la estadística y en este caso de los conceptos de varianza, desviación y desviación estándar, permiten utilizar herramientas teóricas que faciliten mejorar dichos aspectos. Por tal razón, el trabajo se desarrolló bajo el análisis didáctico matemático desde el enfoque ontosemiótico, en este caso, se ejecuta desde 4 niveles:

Nivel 1: Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas

En este nivel, se estudiaran las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.).

Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos.

Nivel 2: Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

En este nivel, se centrarán en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas; su finalidad es describir la complejidad ontosemiótico de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

Nivel 3: Análisis de las trayectorias de interacciones didácticas.

Aquí se realizó una análisis didáctico desde la situación – problema y de las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (análisis 1) a las configuraciones de objetos (ecológicas/cognitivas/afectivas) y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (análisis 2) hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, lo cual constituye este tercer nivel o tipo de análisis didáctico orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (análisis 3).

Nivel 4: Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio; Análisis de tipo valorativo desde criterio de idoneidad.

Se realizaron los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su idoneidad didáctica (Godino, Batanero, & Font, 2004) (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

CAPITULO IV

INDAGANDO EN LOS RESULTADOS: ANÁLISIS Y APLICACIÓN DEL GROS

4.1 Idoneidad de un proceso de instrucción matemática.

La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión de estados (Godino, 2003). Ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su puesta en escena.

La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática. Somos conscientes de que la valoración de la idoneidad de un proceso instruccional requiere registrar un complejo de informaciones sobre el estado y evolución de los distintos componentes y dimensiones que lo definen. Es necesario, por tanto, usar diversos métodos y técnicas de observación, registro y medida de datos (cuestionarios, entrevistas, grabaciones audio-visuales, etc.) y determinar los estados cognitivos de los estudiantes en diferentes momentos del proceso instruccional.

4.1.1 Idoneidad Epistémica

La valoración de la idoneidad epistémica del proceso de estudio implementado la haremos teniendo en cuenta la representatividad de los significados implementados para la noción de parámetros de dispersión en correspondencia al significado de referencia. En la trayectoria epistémica del proceso instruccional observado se distinguen secuencias en las cuales existe una ruptura epistémica entre los significados institucionales pretendido e implementado, que no obedecen a intervenciones establecidas a priori por el profesor y cuyo objetivo sería que los estudiantes superaran un *obstáculo cognitivo* o *epistemológico*. Estas rupturas se identifican en la utilización (*acción*), la construcción (*acciones-argumentaciones*) y la comunicación (*lenguaje-argumentación*) de nociones, proposiciones y problemas. De hecho, las nociones, proposiciones, lenguaje, argumentos, acciones y problemas (como entidades constituyentes de los significados institucionales y personales) son los *observables* que permiten hacer operativos los criterios de idoneidad y, por lo tanto, valorar un proceso instruccional (Wilhelmi, Bencomo, & Godino, 2006).

A continuación identificaremos en una secuencia del proceso (tabla 6), a modo de ejemplo, algunos observables (noción, argumento, lenguaje) que permiten poner en entredicho la idoneidad de la dimensión epistémica en el proceso de instrucción observado. Por un lado, el profesor no aborda explícitamente la noción de "dispersión":

La expresión $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i.[Y_i - \bar{X}]^2}{n}$ representa una expresión algebraica de variable real únicamente fijados unos valores para los parámetros *n*. La formalización de la noción de función (significado pretendido) exige la determinación de la naturaleza de los conjuntos inicial y final (subconjuntos de **R**). La naturaleza de estos conjuntos representa un objeto *parámetro* en el discurso (Wilhelmi, Bencomo, & Godino, 2006).

En ocasiones, un objeto lingüístico aislado es foco de una ruptura epistémica no controlada y que, incluso, puede constituirse en *obstáculo didáctico*. En una fase de la instrucción el profesor utiliza la perífrasis "variabilidad de los datos" como sinónimo del "cómo se dispersan las observaciones a partir de un dato central y que representa en el contexto"

[1] P: … Vemos que no todos los registros numéricos son iguales, existe una diferencia. Como podemos manejar el concepto de dispersión desde este caso.

[2] A_1: Que cada elemento del conjunto esta apartado cierta cantidad de un punto que está en el centro.

[3] P: ¿Ese apartado que usted dice, que significa?

[4] A_1: Nos representa que tan lejos están entre ellos.

[5] P: ¿Y eso significa que?

[6] A_1: Pues que están muy lejos y otros muy cerquita

[7] P: Ahhhh ya… eso se conoce como dispersión.

[8] A_1: Sí. Eso

[9] P: Entonces… ¿Qué se entiende por dispersión?…
[10] P: cada elemento del conjunto se encuentra ubicado en un punto de la muestra y a cierta distancia de otros elementos e inclusive del valor central que entes caso es la media aritmética. Por lo tanto si la distancia es homogénea, es decir, igual en su mayoría, su dispersión es "poca", en caso contraria, si es heterogénea, su dispersión es "alta".

Tabla 8. Secuencia de la Clase. Elaboración de los autores.

4.1.2 Idoneidad Cognitiva

En la Teoría de las Funciones Semióticas se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Con nuestro material, la proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes puede ser analizada únicamente por medio de las intervenciones de los estudiantes.

Por ejemplo, en el diálogo de la tabla 6 observamos las dificultades que tienen los alumnos para interpretar la definición de dispersión. Este incidente aislado no permite evaluar la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción en términos de proximidad de la zona de desarrollo potencial del estudiante.

Parece razonable pensar que con la ayuda del profesor, y con recursos adecuados el estudiante puede aprender el conocimiento pretendido. Sería necesario hacer un seguimiento más detallado de los estudiantes para determinar si las explicaciones dadas por el profesor son efectivas.

4.2 Análisis de resultados

4.2.1 Aplicación de la situación didáctica 1

I. Estructura del proceso de implementación de la situación didáctica I

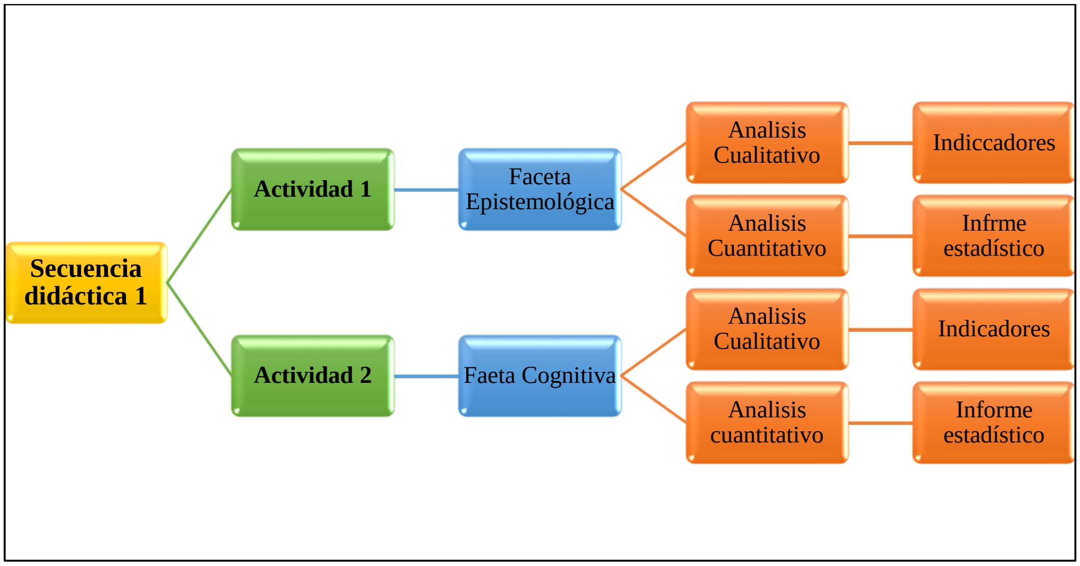


Diagrama 1: Esquema del desarrollo de la unidad didáctica 1 Epistémica y Cognitiva). Elaboración de los autores.

II. Resultados del desarrollo de la secuencia didáctica 1 (Ver Anexo 1).

En el momento de determinar la muestra, población y variable, presentan dificultades. Confunde los términos y significados de cada concepto. En el momento de realizar la tabla de frecuencias, se le dificulta diferenciar la frecuencia absoluta de la relativa; al igual en el momento de hallarla o calcularla, su procedimiento presenta ciertas falencias, que afectan el buen desarrollo del ejercicio. No hay claridad en el cálculo de la frecuencia relativa. En algunos estudiantes, se pudo evidenciar que no supieron resolver el ejercicio debido a que no tenían claridad el proceso de cómo identificar los conceptos básicos en la situación problemas, la construcción de la tabla de distribución de frecuencias, al igual que los cálculos necesarios para tal fin. Se evidencia que no hay un manejo adecuado de las unidades de medida, ya que se realizan los cálculos sin usar dichas unidades correspondientes y se le dificulta para su interpretación. Debido a esto, tiene dificultad de interpretar de forma adecuada el valor de la media aritmética ($\bar{x}$), luego de ser calculada.

Además de la incidencia y cómo repercute en el contexto donde se basa la situación problema.

4.2.2. Aplicación situación didáctica II.

I. Estructura del proceso de implementación de la Unidad Didáctica II

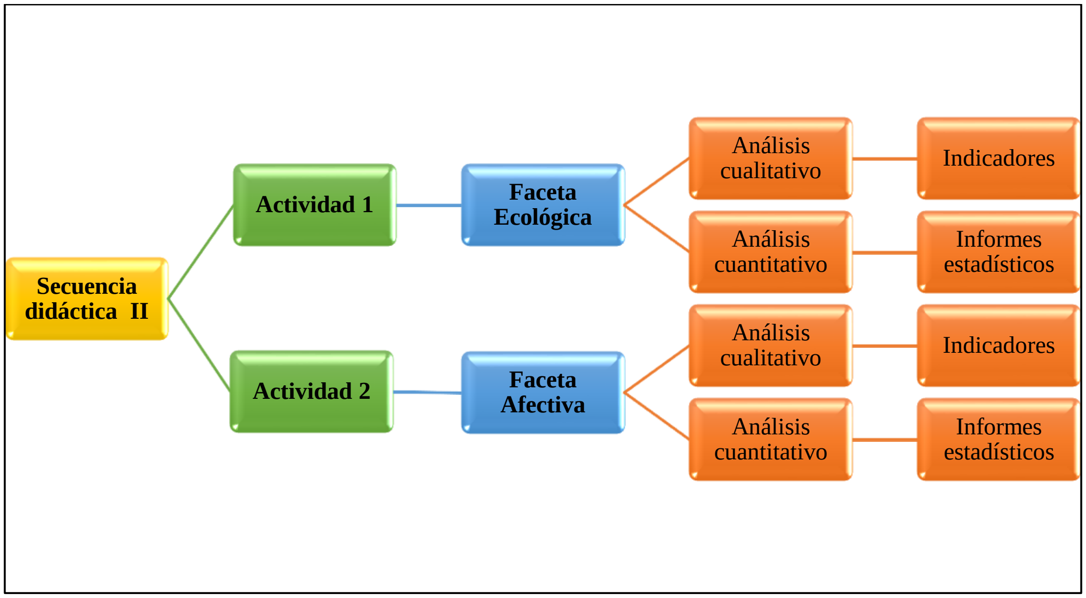


Diagrama 2. Esquema desarrollo unidad didáctica 2 (Ecológica y Afectiva). Elaboración de los autores.

II. Resultados del desarrollo de la secuencia didáctica 2 (Ver anexo 2).

En el momento de determinar la muestra, población y variable, presentan una mejora en el reconocimiento de objetos y sus significados. El manejo de los términos y significados de cada concepto son adecuados. En el momento de realizar la tabla de frecuencias, presentan un manejo más idóneo de los componentes de dicho instrumento, a pesar der la dificultad que hay entre la frecuencia absoluta de y la frecuencia relativa; al igual en el momento de hallarla o calcularla, no tiene claro el procedimiento que se requiere para tal fin. En algunos estudiantes, se pudo evidenciar que logran resolver el ejercicio debido a que han adquirido un mejor manejo de los procesos de cómo identificar los conceptos básicos en la situación problemas, la construcción de la tabla de distribución de frecuencias, al igual que los cálculos necesarios para tal fin.

4.2.3 Aplicación de la situación didáctica III

I. Estructura del proceso de implementación de la secuencia didáctica III

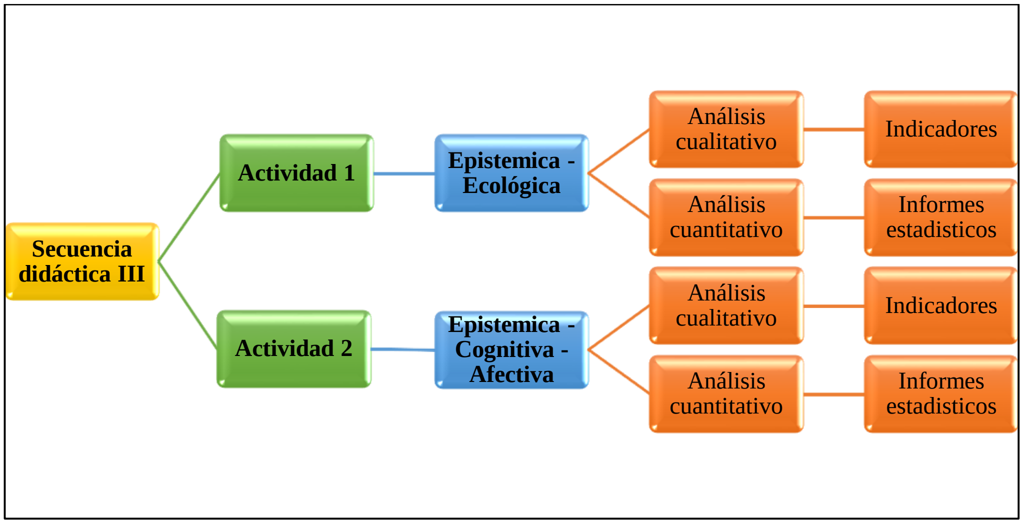


Diagrama 3. Esquema del desarrollo de la unidad didáctica 3 (Interacción entre las facetas). Elaboración de los autores.

II. Resultados del desarrollo de la secuencia didáctica 3 (Ver anexo 3).

Durante el desarrollo de la unidad 3, se vivieron 3 momentos: el primer momento tiene relación con la construcción y diseño de la validación y conformación de los datos, se evidencia una apropiación más sólida y fortalecida a través de un proceso de ejercitación, de los conceptos y significados del objeto matemático, relacionado con los componentes y parámetros que conciernen con las distribuciones de frecuencias, los procesos lógico-matemáticos, la agilidad mental, los cálculos procedimentales y demás secuencias que requieran de algún proceso matemático. Podemos evidenciar, que en la mayoría de los estudiantes evaluados, se ha visto una articulación idónea del concepto del objeto matemático, en cuanto a las distribuciones de frecuencias, el fortalecimiento desde lo epistémico, que es una de las finalidades del instrumento evaluativo. Para el segundo momento, de manera similar se evidencia en los estudiantes, un manejo más eficiente de los conceptos y significados de los estadígrafos y caracteres estadísticos correspondientes a la dispersión, ligados a la situación problema. En un gran porcentaje, los estudiantes establecen una adecuada articulación con relación a los cálculos de estos estadígrafos de dispersión, donde se observa que ha aflorado la dimensión epistémica y la dimensión cognitiva a través de la implementación y análisis de este instrumento evaluativo. La sensibilización que de alguna manera afecta al estudiante, en la utilidad y el significado de los resultados de los estadígrafos, ha permitido que las facetas ecológicas y afectivas hayan subido su nivel de idoneidad, por lo tanto hemos mejorado el aprendizaje.

4.3 Aplicación de la secuencia didáctica IV

4.3.1 El significado institucional implementado

Dentro de los significados institucionales, la realidad del aula, esto es, las interacciones del profesor con los estudiantes y entre éstos, conducen a aquél a seleccionar determinadas prácticas, introducir otras nuevas, abordar conceptos relacionados, etc. Es decir, interesa definir el *significado institucional implementado* como el sistema de prácticas, operativas y discursivas, que tienen lugar realmente en el aula de matemáticas, las cuales se constituyen en la referencia para el estudio de los alumnos y la evaluación de sus aprendizajes (Godino, Batanero, & Font, 2004).

4.3.2 Secuencia didáctica aplicada (situación problema)

El objetivo de la esta situación problema, es lograr que el estudiante potenciar los conceptos trabajados en las secuencias anteriores, con una apropiación mucho más fuerte del objetos matemáticos. Con los objetos trabajados durante el desarrollo de la investigación, el estudiante podrá determinar si son ostensivos o no ostensivos dependiendo de la institucionalidad y lo personal que fuese. Así que, durante el desarrollo de estas secuencias, el estudiante tendrá dentro de sus tareas, el manejo y significado del concepto de media y las propiedades, la contextualización de la misma, la creación de tablas, interpretación y argumentación de la aplicación de la medida de centralización, la apropiación del concepto de dispersión, sus propiedades, argumentos y justificaciones de como infiere estas medidas de dispersión en el contexto de las situaciones problema.

4.3.3 Los procesos de instrucción matemática.

La aleatoriedad de todo proceso de instrucción conduce a que, por mucho que se planifique, siempre aparecen elementos no previstos que alteran las trayectorias, sobre todo debido a la adaptación a la realidad escolar que todo profesor ha de hacer. Solamente, observando el desarrollo instruccional es posible describir las trayectorias muestrales empíricas. (Wilhelmi, Bencomo, & Godino, 2006).

4.3.4 Análisis de los resultados de la unidad didáctica IV.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica 4, se vivieron dos momentos, en los cuales cada uno de ellos tenía relacionado una serie de tareas; específicamente, en el primero momento, tenía 2 tareas: una de ellas era la interpretación y análisis de las tablas de frecuencias. A partir de allí, se generan una serie de cuestionamientos sobre de qué manera, estos valores y posibles caculos se involucran en el contexto y en la apropiación de los estadígrafos relacionados con las medidas de centralización. Esta primera tarea, busca afianzar los conceptos y el significado que se manejan durante el desarrollo del ejercicio, fortalecer la apropiación del objeto matemático y mejorar los niveles de idoneidad de la faceta epistémica. A continuación, la tarea dos del primer momento, sirve de complemento para la finalidad a la que se quiere llegar. En esta ocasión las preguntas y los cuestionamientos se hacen más profundos para tener un análisis epistémico más coherente, aumentar la parte cognitiva y sensibilizar la parte afectiva. Debido a esto, los niveles de idoneidad de la didáctica en el aprendizaje del objeto matemático, irán subiendo, a la medida que se aumente la apropiación del concepto, el significado y la instrucción matemática.

4.4 GROS (Guía de reconocimiento de objetos y significados) .

4.4.1 Trayectoria epistémica.

Las nociones teóricas para el análisis de los procesos de instrucción matemática fueron interpretadas e introducidas por primera vez por Godino, Contreras y Font (2006). Por tal razón (Rivas, 2014) en su trabajo define que una configuración didáctica es un segmento de actividad didáctica que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación-problema diseñada o implementada.

Además la situación-problema que se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas sub-tareas cada una de las cuales se puede considerar como una sub-configuración. En consecuencia, una trayectoria didáctica se define como la secuencia de configuraciones didácticas mediante las cuales se aborda el estudio del contenido pretendido (Ossa Nieto & Aldana Bermúdez, 2017).

Para nuestra investigación dichas nociones de configuración y sub configuración tienen una doble función en el desarrollo de la ingeniería didáctica: en primer lugar, aplicamos estas herramientas para dividir el proceso de estudio implementado en unidades de análisis y en segundo lugar, las utilizamos junto a la noción de trayectoria didáctica para realizar una descripción narrativa de la implementación (experimentación).

En el caso del EOS, distingue seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos en ella, por tanto, seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento.

E1: *Situacional*: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: *Actuativo*: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: *Lingüístico*: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: *Proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: *Argumentativo*: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático.

El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis considerando una nueva unidad cuando la trayectoria epistémica cambia de estado. (Godino J., 2010).

Llamaremos *configuración epistémica* al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema. Se trata, por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que llamamos *unidades epistémicas*. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio son numeradas correlativamente para su referencia y las denominamos *unidades naturales* de análisis.

Analizaremos a continuación el proceso de estudio de la desviación estándar realizada en una experiencia con estudiantes de secundaria del grado noveno. Para cada una de las unidades de análisis en que se dividió dicho texto, en la **tabla 9**, se hace una breve descripción de dicha unidad, identificado el estado de la trayectoria epistémica.

Unidad	Descripción	Estado
E1	Enunciado de una tarea problemática de búsqueda de un representante de una colección de datos.	Situacional.
E2	Términos y expresiones matemáticas; Expresiones lingüísticas.	Lingüístico.
E3	Aplicación de una técnica ya conocida (cálculo de la media aritmética).	Actuativo.
E4	Asignación a la media aritmética de una propiedad: ser el mejor	Proposicional.

	representante de un conjunto de datos.	
E5	Justificación de la propiedad asignada a la media.	Argumentativo.
E6	Aplicación de una técnica ya conocida (cálculo de la varianza).	Proposicional.
E7	Justificación de la propiedad asignada a la varianza.	Argumentativo.
E8	Aplicación de una técnica ya conocida (cálculo de la desviación estándar).	Proposicional.
E9	Justificación de la propiedad asignada a la desviación estándar.	Argumentativo.
E10	Validación de la técnica aplicada.	Argumentativo.
E11	“La desviación estándar es el alejamiento de los datos”. Nueva definición como resultado de una operación.	Conceptual.
E12	Validación de las propiedades.	Argumentativo.
E13	Enunciado de los conflictos epistémicos.	Situacional.

Tabla 9. Trayectoria epistémica del proceso instruccional. (Elaboración de los autores).

4.4.2 Registros de la configuración epistémica desde el GROS a partir de la situación problema.

En la tabla 10, se muestra el proceso de configuración epistémica del objeto matemático, a partir de la situación problema que se ha estudiado.

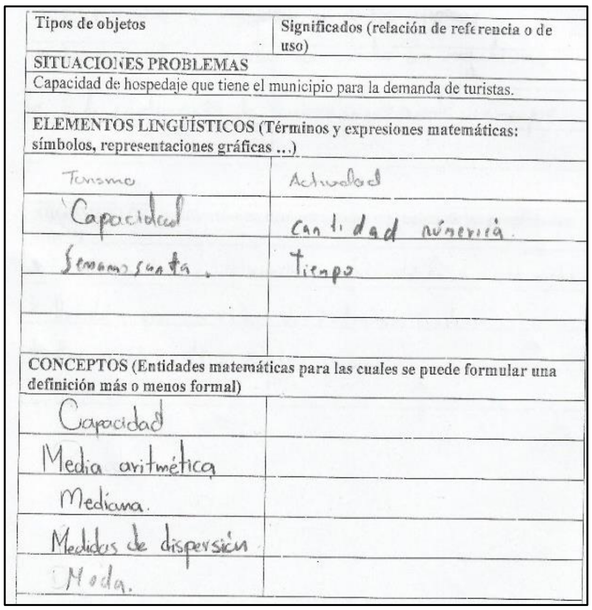
Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
SITUACIONES PROBLEMAS	
El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), un registro a 8 establecimientos de alojamiento y hospedaje indicando su capacidad de huésped y cuantas habitaciones o cuartos tienen para atender la demanda de turistas que ingresan a la región.	
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas …)	
Huésped	Unidad de medida cuantificada
8	Representación de numero natural
Registro	Dato o numero
Capacidad	Unidad de medida
Habitación	Espacio o lugar
Turismo	Actividad económica
Hospedaje	Actividad o servicio
Demanda	Termino economía
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Promedio	Operación matemática que representa el referente de los datos.
Dispersión	Concepto estadístico para determinar la homogeneidad o heterogeneidad.
Variabilidad	Iteración de los datos con respecto a uno fijo
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Sumatoria de los registros	Permite hallar la suma total de los registros que conforman la muestra.
Promedio de los registros	Permite hallar la media, es decir el valor referente a la muestra.
Desviaciones de los registros	Permite hallar la distancia entre el registro y el valor medial.
Varianza de la muestra	Permite determinar el comportamiento y variabilidad de los datos registrados en la muestra.

Desviación estándar de la muestra	Nos indica que tan homogénea o heterogénea es la muestra
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
P_1: La sumatoria de las desviaciones de cada término con respecto a la media es igual a cero.	Nos permite entender que existe una simetría entre los resultados positivos y negativas. Lo cual nos generaría una distribución uniforme.
P_2: Una serie de datos solo tiene una media.	Existe un valor único
P_3: La varianza siempre será un valor positivo o cero	Nunca será negativo la varianza
P_4: La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza de una variable aleatoria.	La desviación típica o estándar se obtiene a partir de la raíz cuadrada del resultado de la varianza.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades usadas)	
A_1: Aplicaciones de las desviaciones.	Justificar propiedad 1
A_2: La media aritmética es la sumatoria de todos los datos de una muestra dividido el número total de datos.	Justificar propiedad 2
A_3: La varianza determinara el grado de dispersión de los datos.	Justificar propiedad 3 y 4
Conflictos potenciales • Las propiedades de la sumatoria de los registros. • Interpretación de la media aritmética y sus propiedades. La simbología genera algunos conflictos con otras medidas de dispersión. • Las propiedades de la varianza. • Manejar el concepto de valor absoluto para que las desviaciones sean positivas. • El concepto de dispersión en datos contextualizados y su significado.	

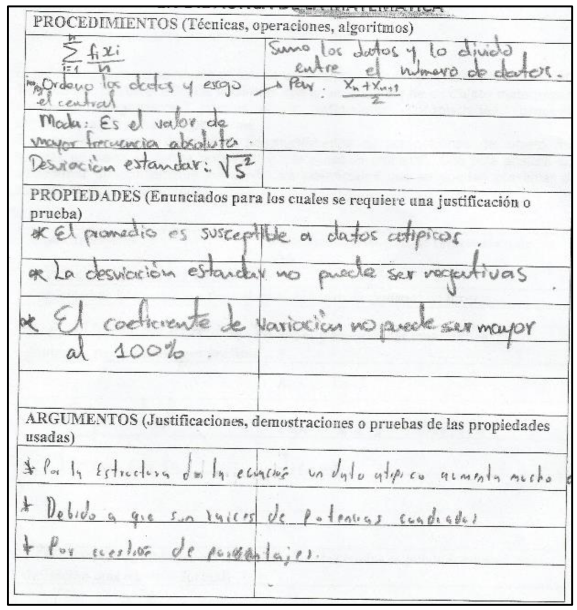
• La interpretación desde fuentes estadísticas como tablas y graficas; su articulación y relación con los estadígrafos de variabilidad.
• Homogeneidad y heterogeneidad entre los datos de una muestra determinística.

Tabla 10. Elaboración de la GROS (situación problema). (Elaboración de los autores).

A continuación, algunos registros dados por los estudiantes, en la configuración de una dimensión epistémica, mediante el desarrollo de la GROS (guía de reconocimiento de objetos y significado), luego que haber realizados las tareas pertinentes a la situación problema, como lo muestra la Fotografía 1.



Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
SITUACIONES PROBLEMAS	
Capacidad de hospedaje que tiene el municipio para la demanda de turistas.	
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas …)	
Turismo	Actividad
Capacidad	Cantidad numérica.
Semana santa.	Tiempo
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Capacidad	
Media aritmética	
Mediana.	
Medidas de dispersión	
Moda.	

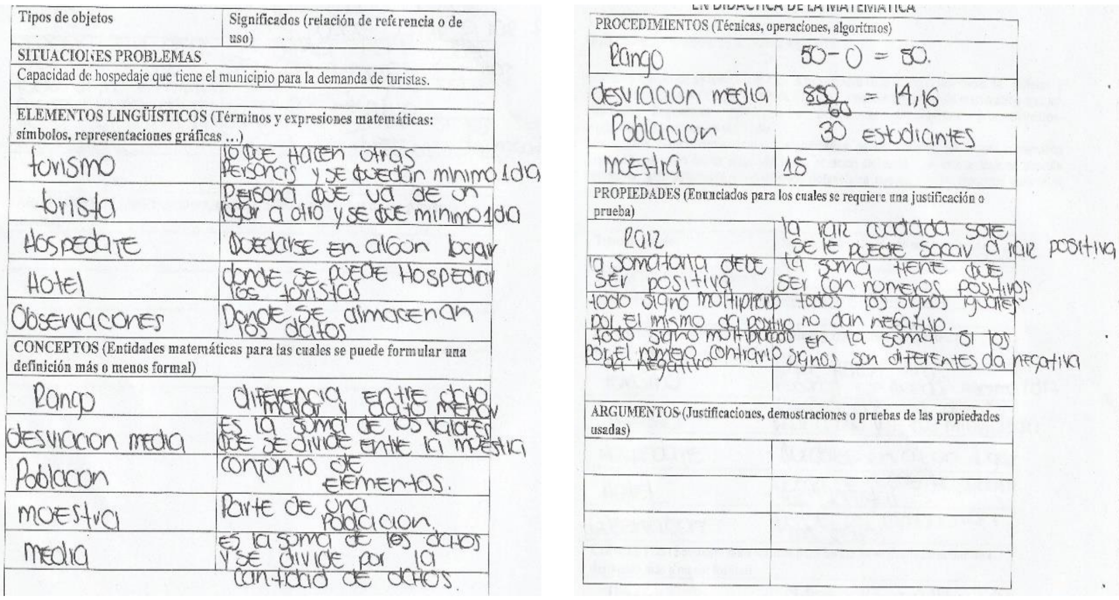


PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
$\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i x_i}{n}$	Sumo los datos y lo divido entre el número de datos.
Ordeno los datos y escojo el central	Par. $\frac{X_n + X_{n+1}}{2}$
Moda: Es el valor de mayor frecuencia absoluta.	
Desviación estandar: $\sqrt{S^2}$	
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
* El promedio es susceptible a datos atípicos	
* La desviación estandar no puede ser negativas.	
* El coeficiente de variación no puede ser mayor al 100%.	
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades usadas)	
* Por la estructura de la ecuación un dato atípico aumenta mucho	
* Debido a que son raíces de potencias cuadradas	
* Por cuestión de porcentajes.	

Fotografía 1 Registro GROS Estudiante 1

El análisis epistémico se realiza utilizando la herramienta Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados. Desde el EOS, las nociones que giran alrededor de un objeto matemático son: los elementos lingüísticos, conceptos o definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y la situación problema. Este análisis permite determinar los significados de las nociones del objeto matemático puestas en juego en forma potencial por la situación problema. Con este análisis es posible determinar anticipadamente los conflictos potenciales que se pueden presentar durante la solución de la tarea planteada.

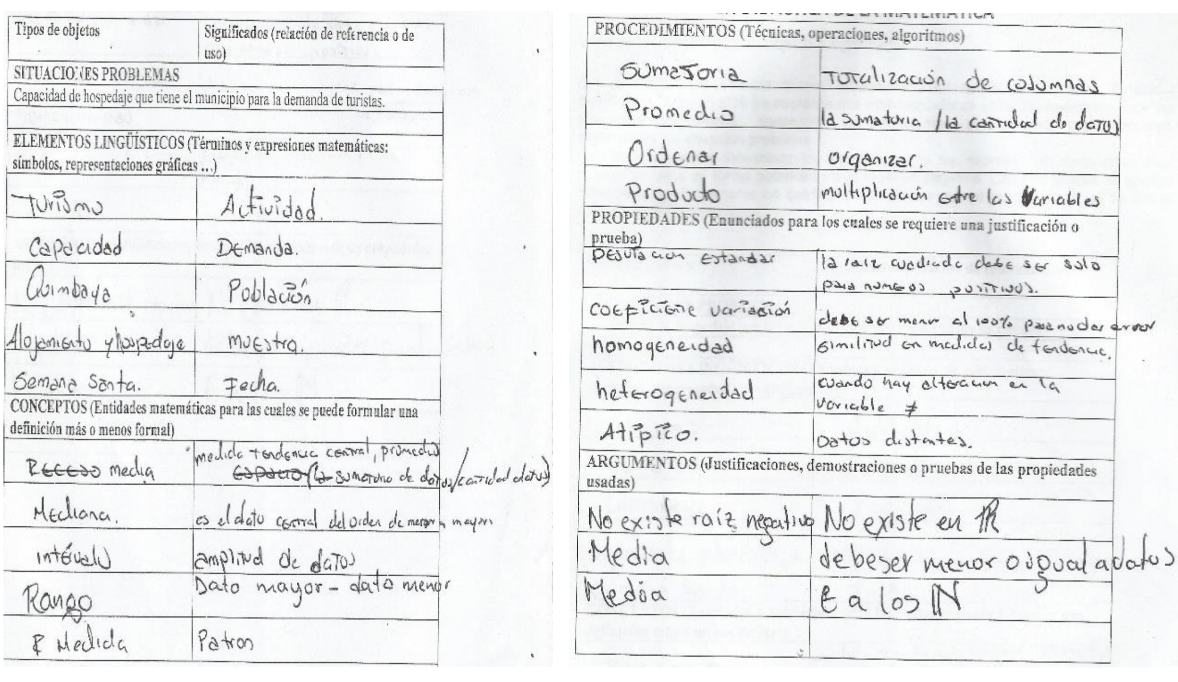
A continuación en la **Fotografía 2** y **Fotografía 3**, se muestra otros registros datos por los estudiantes durante el desarrollo de la GROS, a partir de una cuestión didáctica (situación problema) articulada con el turismo.



Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
SITUACIONES PROBLEMAS	
Capacidad de hospedaje que tiene el municipio para la demanda de turistas.	
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas …)	
turismo	lo que hacen otras personas y se quedan minimo 1 dia
turista	persona que va de un lugar a otro y se que minimo 1 dia
Hospedaje	quedarse en algun lugar
Hotel	donde se puede hospedar los turistas
Observaciones	Donde se almacenan los datos
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Rango	diferencia entre dato mayor y dato menor
desviacion media	es la soma de los valores que se divide entre la muestra
Poblacion	conjunto de elementos.
muestra	Parte de una poblacion.
media	es la soma de los datos y se divide por la cantidad de datos.

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Rango	50 - 0 = 50.
desviacion media	$\frac{850}{60} = 14,16$
Poblacion	30 estudiantes
muestra	15
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
Raiz	la raiz cuadrada sole se le puede sacar a raiz positiva
la somatoria debe ser positiva	la soma tiene que ser con numeros positivos
todo signo multiplicado por el mismo da positivo	todos los signos iguales no dan negativo.
todo signo multiplicado por el numero contrario da negativo	en la soma si los signos son diferentes da negativa
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades usadas)	

Fotografía 2: Registro GROS Estudiante 2



Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
SITUACIONES PROBLEMAS	
Capacidad de hospedaje que tiene el municipio para la demanda de turistas.	
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas …)	
Turismo	Actividad.
Capacidad	Demanda.
Quimbaya	Población
Alojamiento y hospedaje	muestra.
Semana Santa.	Fecha.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
~~[illegible]~~ media	medida tendencia central, promedio ~~espacio~~ (la sumatoria de datos/cantidad datos)
Mediana.	es el dato central del orden de menor a mayor
intérvalo	amplitud de datos
Rango	Dato mayor - dato menor
? Medida	Patron

PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Sumatoria	Totalización de columnas
Promedio	la sumatoria / la cantidad de datos
Ordenar	organizar.
Producto	multiplicación entre las variables
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
Desviación estandar	la raiz cuadrada debe ser solo para numeros positivos.
coeficiente variación	debe ser menor al 100% para no dar error
homogeneidad	similitud en medidas de tendencia.
heterogeneidad	cuando hay alteracion en la variable ≠
Atipico.	Datos distantes.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades usadas)	
No existe raíz negativa	No existe en $\mathbb{R}$
Media	debe ser menor o igual a datos
Media	$\in$ a los $\mathbb{N}$

Fotografía 3 Registro de GROS Estudiante 3.

CAPITULO V

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

En el capítulo que presentamos a continuación, establecemos las síntesis y las principales conclusiones de los estudios realizados. De igual forma, presentamos la síntesis y conclusiones en relación a los objetivos de la investigación desarrollados en este estudio.

5.1 CONCLUSIONES

De acuerdo con el propósito general de esta investigación "*prácticas matemáticas para el aprendizaje de las medidas de dispersión en estudiantes de educación básica, desde un enfoque ontosemiótico"* nos hemos planteado cinco objetivos específicos (OE), que debemos retomar a continuación para indicar las principales conclusiones obtenidas en cada uno de ellos.

- Para dar inicio a la investigación, se aborda una revisión bibliográfica sobre los conceptos definidos relacionados con las medidas de centralización y dispersión. Apoyado en diferentes referentes teóricos entre libros, reportes y artículos relacionados, se fue solidificando y construyendo la epistemología del concepto matemático. Los estudiantes han alcanzado un nivel medio en la idoneidad de la didáctica en la faceta epistémica. Estos es debido a las aplicaciones de las secuencias didácticas y sus diferentes actividades, donde se pudo ir configurando el concepto del objeto matemático, apoyados en referentes teóricos y los pre saberes adquiridos durante su formación. (OE1)

- El estudiante logra obtener una definición más acertada al concepto de dispersión. Mediante su construcción, se fue fortaleciendo así la dimensión cognitiva sobre el objeto matemático y por ende aumentando el nivel de idoneidad de bajo a medio. Allí las prácticas matemáticas ejecutadas dentro y fuera del aula, fueron determinantes para la construcción y posterior fortalecimiento del concepto del objeto matemático y por ende la dimensión cognitiva (OE2).

- El desarrollo del tercer objetivo específico, fue determinante para el aprendizaje del objeto matemático en los estudiantes. No se puede obtener una fuerte asimilación y una buena estructuración del objeto matemáticos desde lo epistémico y una configuración fortalecida desde lo cognitivo, si no se incentiva y se estimula la parte emocional. También, si no se tiene en cuenta su habilidades, dificultades, destrezas en el desarrollo de procesos matemáticos y su interpretación lectora. Desde lo afectivo, la idoneidad se puede considerar que alcanza un nivel medio, sin embargo su estimulación es fuerte ya que ayuda a su formación integral y se relación con sus interés en el aprendizaje de las matemáticas. Desde la faceta ecológica, la idoneidad de la didáctica aumenta su nivel, se puede considerar alto, ya que se relaciona con su diario vivir, el contexto, el comportamiento de los sistemas culturales y económicos a diarios, los cambios habituales y sus costumbres. Debido a que las prácticas que se realizaron fueron transversalizadas con las actividades turísticas, principal actividad de la región (OE3).

- Durante el proceso de investigación se aplicaron 6 instrumentos como parte de las prácticas matemáticas, 4 secuencias didácticas y 12 actividades para fortalecer el aprendizaje de las medidas de dispersión. Basados en los resultados obtenidos en cada una de las actividades propuestas, vemos una evolución en la claridad del concepto y como se aplica entre actividades programadas. Podemos considerar que a medida que íbamos subiendo el nivel de complejidad en cada actividad, la configuración epistémica y la dimensión cognitiva se iba fortaleciendo cada vez más. Sin embargo, entender el sentido de dispersión en cada actividad, aun persistía esta dificultad en la interpretación de estos parámetros en su contexto o entorno y como influían en los comportamientos sociales de su comunidad. Aun así, podemos considerar, que en este objetivo, el nivel de idoneidad de la faceta epistémica ya había alcanzado el **"Alto"** en la mayoría de estudiantes evaluados, al igual de la faceta cognitiva, su nivel de idoneidad, sigue estando entre "**Medio y Alto"**.

- La finalidad de una investigación en didáctica de la matemática, es llegar a la institucionalidad del objeto matemático. El docente investigador, luego de hacer el diseño y las implementaciones de las prácticas matemáticas en el aula y fuera de ella, recopila los resultados y los somete a un análisis descriptivo – cualitativo – cuantitativo, para obtener resultados que lo llevan a sacar conjeturas y conclusiones sobre el aprendizaje obtenido por los estudiantes.

Las prácticas matemáticas para el aprendizaje de las medidas de dispersión desde el enfoque ontosemiótico, nos ha llevado a la interpretación del concepto en un contexto social y económicos, al cálculo de estos indicadores o parámetros de variabilidad desde situaciones utópicas y su respectiva interpretación, pero lo más relevante es que a través de estos resultados se construye y se configura a intencionalidad del objeto matemático.

➢ Vemos entonces, cómo a través de las configuraciones aportadas en cada faceta de la idoneidad de la didáctica, se fue construyendo la institucionalidad del concepto del objeto matemático, bajo el foco de una trayectoria didáctica y así lograr la fenología del objeto matemático.

- ***Dimensión epistémica.*** Desde la mirada de esta faceta, en las ejecuciones de situaciones problemas, resultaron apropiadas en tanto que han permitido contextualizar la mayoría de los conceptos, procedimientos, propiedades, lenguajes y argumentos de la estadística elemental abarcando aspectos del conocimiento común y avanzado (Godino J. , 2010). A partir de los resultados obtenidos, los estudiantes junto con el profesor, logran configurar la epistemología del concepto del objeto matemáticos, logrando así la finalidad en esta faceta.
- ***Dimensión cognitiva.*** Se presentaron conceptos y operaciones consideradas elementales, que no fueron recordados por los profesores anteriores. Las soluciones a las tareas y los resultados del trabajo final presentado por los estudiantes dan cuenta que los contenidos relacionados con el conocimiento común y el dominio de conceptos y procedimientos fue asertiva.
- ***Dimensión afectiva.*** Las situaciones problemas que se plantearon en el proceso de aprendizaje resultaron motivadores para los 40 estudiantes, ya que durante la implementación hubo una preocupación constante del profesor para la formación de los estudiantes, teniendo en cuenta cambios de actitudes frente a la forma de como asimila la tarea, como la relaciona y la manera cómo impacta en la integridad personal y social de cada estudiante.

- ***Dimensión ecológica.*** Durante el proceso de aprendizaje se tuvo en cuenta aspectos como las costumbres y tradiciones, que permitió establecer algunas relaciones entre los contenidos referentes a la dispersión con el medio social y económico de los estudiantes. Aquellas conexiones interdisciplinares, la formación en valores y la formación profesional se abordaron de manera espontánea. También, en el desarrollo de esta faceta, hemos logrado subir el nivel de idoneidad, ya que se han fortalecido los componentes del objeto matemáticos, para los contenidos curriculares, académicos e institucionales de la comunidad educativa. De acuerdo con el propósito mencionado hemos logrado evidenciar y desarrollar herramientas del EOS que son aplicables en las diferentes fases de la ingeniería didáctica. En general este marco teórico proporciona herramientas originales que amplían las posibilidades de análisis de otros marcos teóricos.

5.2 Implicaciones y aportes de la investigación.

Uno de los aportes más significativos de esta investigación es entender que con la metodología propuesta es posible elaborar diferentes guías de idoneidad didáctica de acuerdo al propósito que se tenga. Estas guías pueden ser vistas como una síntesis de conocimientos didáctico-matemático disponibles en diferentes fuentes, por lo tanto pueden ser utilizadas como una guía de diseño, implementación o evaluación de experiencias docentes en un centro educativo o también como instrumentos de reflexión para cada una de las facetas y dimensiones que están presentes en un proceso de formación de profesores.

Otros aportes de esta investigación se consideran, por una parte, haber ampliado las posibilidades de realización de ingenierías didácticas o investigaciones de diseño propuesta en otros marcos teóricos y por otra, la aportación de conocimientos específicos sobre la formación de profesores no licenciados en matemáticas y que tienen la tarea de formar poblaciones en y para la diversidad.

También la elaboración de situaciones didácticas (*Guy Brousseau*), que nos permite marcar y determinar las trayectorias didácticas para la apropiación y la configuración del concepto del objeto matemático.

Otro aporte significativo, es identificar como se enseña la estadística desde la básica, se puede conjeturar, que los conceptos estadísticos que ven los estudiantes son de alguna manera abstractos, teóricos y robustos. Abstractos por ser expresiones matemáticas, lenguaje entre símbolos y signos; teóricos ya que solo se definen mas no se contextualizan; robustos ya que son poco flexibles y poco dinámicos, por lo que hace que el objeto matemático no esté en concepto y por tanto no se pueda interpretar.

Cabe resaltar que una fuerte limitante en la enseñanza de la estadística es la intensidad académica con que se pueda desarrollar en las instituciones educativas contando que sea un espacio académico y no un contenido dentro del área de matemáticas.

La metodología que hemos aplicado en este estudio puede resultar útil para la realización de dichos estudios. Sugerir la implementación de los instrumentos de valoración de la idoneidad de la didáctica en diferentes ampos de investigación, relacionados con el estudio de comportamientos sociales y culturales; ayudar al aprendizaje de los conceptos matemáticos desde sus actividades sociales y económicas; estudio socio epistemológicos de los grupos sociales y su articulación con el EOS.

De esta manera, será una iniciativa de promover y enriquecer la didáctica de la estadística, que está aflorando dentro de las teorías de la Didáctica de la Enseñanza de la matemática.

CAPITULO VI

PARTICIPACIONES EN EVENTOS

Finalmente, incluimos las participaciones en eventos nacionales e internacionales que fueron derivados de este trabajo de grado para obtener el título de magister en Enseñanza de la Matemática.

6.1 Participaciones en eventos

- *Seminario Interno de Matemáticas, Universidad del Quindío*. Aprendizaje de las medidas de dispersión de estudiantes de básica secundaria, desde un enfoque ontosemiótico. Marzo 15 de 2017.
- *Congreso Colombiano de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia*
  Gutierrez Cardona, F., & Aldana Bermúdez, E. (5, 6, 7,8 y 9 de Junio de 2017). Practicas matemáticas para la enseñanza de las medidas de dispersión en el aula sectorizadas desde el turismo. Bogotá, DC, Colombia.
- *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* **RELME 31**
  Gutierrez Cardona, F, & Aldana Bermúdez, E. (31,1,2,3 y 4 de Julio - Agosto de 2017). Practicas matemáticas en el aprendizaje de las medidas de dispersión en un contexto turístico. Universidad de Lima, Perú.
- S*emana de la matemática universidad del Quindío*. Cursillo, Noviembre de 2017.
  La Didáctica de las Matemáticas aporta conocimientos descriptivos y explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos que ayuden a comprender dichos procesos. Pero también debe orientar, de manera fundamentada, la acción efectiva sobre la práctica y promover su mejora progresiva, para lo cual se necesitan teorías de índole instruccional.
- *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* **RELME 32**
  Grisales Davila, Jaime D; Gutierrez Cardona, F, & Aldana Bermúdez, E. (02,03,04,05 y 06 de Julio de 2018).
  Configutacion espistemica a una situacion roblema, desde el Enfoque Ontosemiotico en la Didactica de la Matemática. Universidad de Medellín, Colombia.

Referencias Bibliográficas

Arias Serna, D. (21 de Mayo de 2017). Cuál es el impacto de los medios digitales en los alumnos. La Crónica del Quindío, pág. 20. Recuperado el 21 de Mayo de 2017, de www.cronicadelquindio.com.co

Arias Serna, D. (19 de Febrero de 2017). La estadística protege a la sociedad y salva vidas. . LA CRÓNICA DEL QUINDÍO, pág. 20. Recuperado el 20 de Febrero de 2017

Arzarello, F., Bazinni, L., & Chiapinni, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. (Vol. I). Recife: Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics education. Recuperado el 12 de 12 de 2017

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posicion central. . Departamento de la didáctica de la matemática, 25, 41-48.

Batanero, C., Lopez, M., Lopez, M. d., Diaz-Levicoy, Gonzales-Ruiz, & ignacio. (1 de 2006). Las medidas de dispersion en el estudio de la estadistica inferencial. Granada.

Batanero, M., Lopez, M., & Lopez, M. (1 de 2006). Las medidas de dispersion en el estudio de la inferencia estadistica. grupo FMQ, pág. 5.

Castro Sotos, V., & Noortgate, V. d. (2007).

Cobo, B., & Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto?. Uno 23, 85-96.

Departamental, S. d. (2017). Malla Curricular de Matemáticas . Armenia.

García Perez, C. (2010). Medidas de dispersión. Hidalgo.

Gascón, J. (Julio de 2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. RELIME, 129-159.

Godino, J. (1994). Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática.

Godino, J. (2010). Hacia una teoria de instrucción matemática significativa. 6-8.

Godino, J. (2010). Indicadores de idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. 1-10.

Godino, J. (2014). Enfoque Ontosemiotico. Revista Educacion Matemática, 5.

Godino, J. (2014). Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática; Motivación, sustentación. 313.

Godino, J., & Batanero B., M. C. (2014). Sintesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticas; Motivación, Sustentación, y herramientas teóricas, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 338.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). 338.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). Teoría y Metodología de Investigación, 24.

Godino, J., Wilhelmi, M., & Bencomo, D. (2005). Conflictos epistemicos en un Proceso de Esudio de la Nocion de Funcion. Implicaciones para la formacion de profesores. ALME, 18, 349-355.

GONZALES, P. F. (s.f.). Medidas de Dispersión. Obtenido de Medidas de Ddispersión: www.monografias.com

Gutierrez, F., & Aldana, E. (2017). Prácticas en el apredizaje de la medidas de disperson en un contexto turistico.

Gutierrez, F., & Aldana, E. (25 de Mayo de 2017). Practicas Matemáticas Aplicando Medidas de Dispersión.

Gutierrez, F., Lopez, M., & Cañas, I. (2015). Observatorio Turistico Quimbaya. Quimbaya.

Jacme, & Ciem. (2011). XIII Conferencia Interamericana de Educacion Matematica. XIII Conferencia Interamericana de Educacion Matematica (pág. 2). Recife, Brasil: CIAEM.

Ley General de educación. (1994). Ley 115 de 1994. Bogotá, 1994

Martins, J. A. (2013). Medidas de dispersion con geometria dinámica. XI Congreso Galego de Estadística e Investigación de Operaciones. la coruña.

Matemáticas, R. D. (01 de 01 de 2016). Malla Curricular de Matemáticas. En Redomaq. Armenia, Quindio, Colombia. Obtenido de Derechos Básicos de Aprendizaje: www.mineducación.gov.co

Nacional, (2003). Estándares Básicos de Competencias. En Men, Estandares Básicos de Competencias (págs. 87-88).

Nacional, (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Nacional, (2006). Lineamientos Curriculares. Bogotá: MEN.

Nacional, M. d. (2006). Matriz de Referencia Matemáticas. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Nacional, (2015). Guia de interprteación y uso de resultados de las pruebas saber 3, 5 y 9. Bogotá: icfes., 2017

Nacional, M. d. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. En Men, Derechos Basicos de Aprendizaje V2 (págs. 71-72). Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.

Nieto, A. (2017). Una idoneidad didáctica para la formacion de profesores que atienden poblaciones con deficit cognitivo, desde el desarrollo del pensamiento aleatorio. Investigacion, Universidad del Quindio, Quindio, Armenia. Recuperado el 7 de Enero de 2018

Ossa Nieto, A., & Aldana Bermúdez, E. (2017). Formación de docentes y profesionales de apoyo basado en guías para el análisis y la reflexión didáctica. Revista educación y educadores.

Vallecillos Jimenez, A., & Batanero Bernabeu, M. C. (1995). La inferencia estadística en la investigación experimental en el campo educativo. Revista de Educacion de la Universidad de Granada, 5-16.

Vallecillos, A., Castro M., E., Florés M., P., & Fernando G., F. (2006). Didactica de la Matemática en la Educación Primaria. Granada, España: Proyecto Editorial.

Vallecillos, A., Castro Martinez, E., Florés Martinez, P., & Fernando García, F. (2001). Didactica de la Matemática en la Educación Primaria. Granada, España: Proyecto Editorial.

Vallecillos, A., Castro Martinez, E., Florés Martinez, P., & Fernando García, F. (s.f.). Didactica de la Matemática en la Educación Primaria. Granada, España: Proyecto Editorial .

Vallecillos, A., Martines, C., & Martinez, F. (s.f.). Didactica de la matemática en la Educación Primaria. Granada: Proyecto Editorial.

Wayne W, D. (2012). Bioestadistica; Base para el análisis de las ciencias de la salud. En D. Wayne W., Bioestadistica. Mexico: Editorial Limusa.

Wilhelmi, M. R., Bencomo, D., & Godino, J. D. (2006). Criterios de idoneidad de un proceso de instruccion matemática.

ANEXOS

1. Resultados de la secuencia didáctica 1

Algunos estudiantes no mostraron resultados o avances en la solución de la situación problema en el salón de clase, debido a los inconvenientes presentados de no tener claridad en los conceptos y en los procesos, además de no contar con apoyo de instrumentos electrónicos como calculadoras o celulares. En el momento de calcular los porcentajes, no representa con la cantidad suficiente de decimales, para lograr un redondeo y llegar a una cifra exacta.

Debido a estos inconvenientes, un procedimiento mal hecho o un error de conceptualización ó un mal cálculo, influye en el cálculo de las medidas de dispersión y por ende en su interpretación en el contexto donde se está trabajando.

ÍTEM	CORRECTO	INCORRECTO	EN PROCESO	N. R.	TOTALES
1. Identificación de los conceptos básicos estadísticos en la situación problema	18	31	11	0	60
2. Construcción de la tabla de frecuencias	18	27	15	0	60
3. Cálculo de la columna Xi. Fi	35	10	10	5	60
4. Determinar la media aritmética y su interpretación en el contexto turístico.	15	23	12	10	60
5. Interpretación y conclusiones acerca de la incidencia y el aporte de la media.	15	20	6	19	60

Tabla 11: Registro de resultados de estudiantes por ítem en Unidad Didáctica 1. Elaboración de los autores.

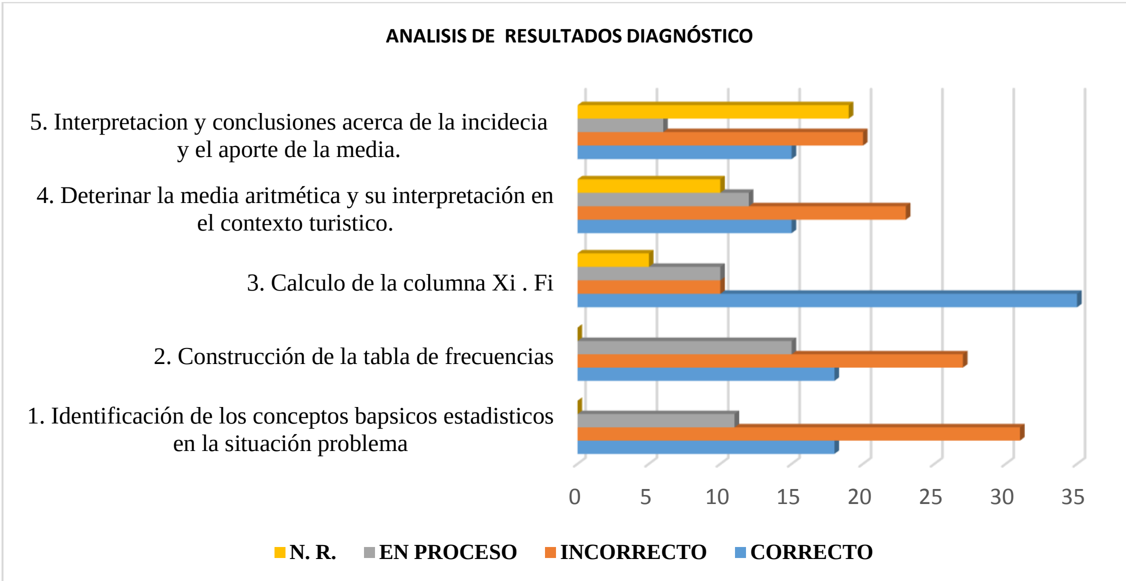
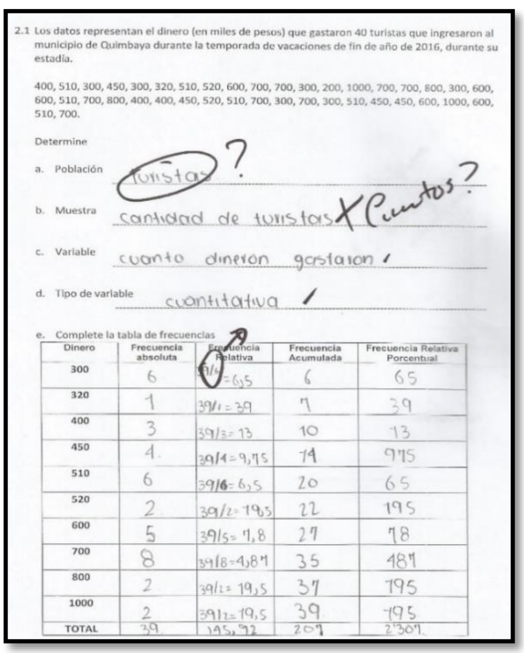


Ilustración 1: Diagrama sobre desempeño de estudiantes Unidad Didáctica 1.

Registros



2.1 Los datos representan el dinero (en miles de pesos) que gastaron 40 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya durante la temporada de vacaciones de fin de año de 2016, durante su estadía.

400, 510, 300, 450, 300, 320, 510, 520, 600, 700, 700, 300, 200, 1000, 700, 700, 800, 300, 600, 600, 510, 700, 800, 400, 400, 450, 520, 510, 700, 300, 700, 300, 510, 450, 450, 600, 1000, 600, 510, 700.

Determine

a. Población turistas ?

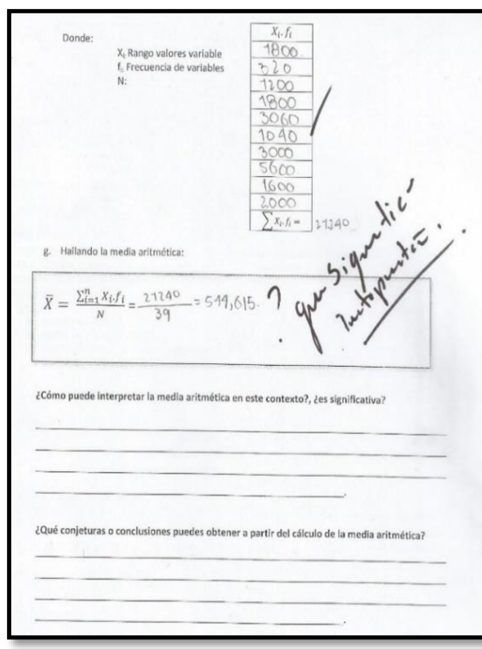
b. Muestra cantidad de turistas X Cuantos?

c. Variable cuanto dineron gastaron

d. Tipo de variable cuantitativa

e. Complete la tabla de frecuencias

Dinero	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Relativa Porcentual
300	6	39/6=6,5	6	65
320	1	39/1=39	7	39
400	3	39/3=13	10	13
450	4	39/4=9,75	14	975
510	6	39/6=6,5	20	65
520	2	39/2=19,5	22	195
600	5	39/5=7,8	27	78
700	8	39/8=4,87	35	487
800	2	39/2=19,5	37	195
1000	2	39/2=19,5	39	195
TOTAL	39	195,92	207	2'307



Donde:

X_i: Rango valores variable
f_i: Frecuencia de variables
N:

$X_i \cdot f_i$
1800
320
1200
1800
3060
1040
3000
5600
1600
2000
$\sum X_i \cdot f_i =$ 21240

g. Hallando la media aritmética:

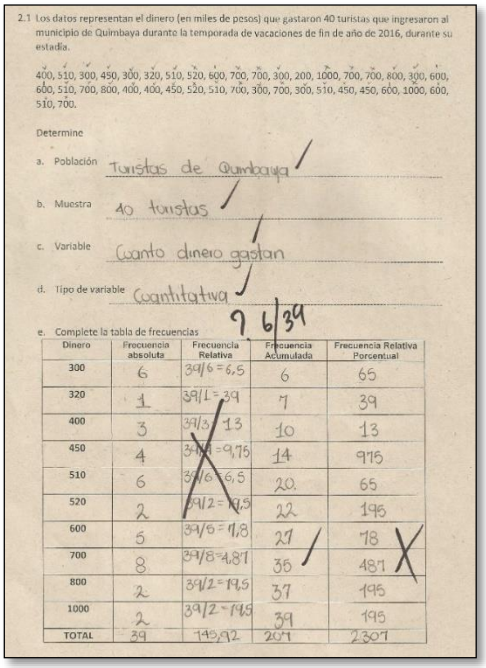
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot f_i}{N} = \frac{21240}{39} = 544{,}615$$

? qué significó. Interpretación.

¿Cómo puede interpretar la media aritmética en este contexto?, ¿es significativa?

¿Qué conjeturas o conclusiones puedes obtener a partir del cálculo de la media aritmética?

Fotografías 4: Fase 1 Estudiante 1 Conceptos. Registros 1 y 2



2.1 Los datos representan el dinero (en miles de pesos) que gastaron 40 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya durante la temporada de vacaciones de fin de año de 2016, durante su estadía.

400, 510, 300, 450, 300, 320, 510, 520, 600, 700, 700, 300, 200, 1000, 700, 700, 800, 300, 600, 600, 510, 700, 800, 400, 400, 450, 520, 510, 700, 300, 700, 300, 510, 450, 450, 600, 1000, 600, 510, 700.

Determine

a. Población Turistas de Quimbaya

b. Muestra 40 turistas

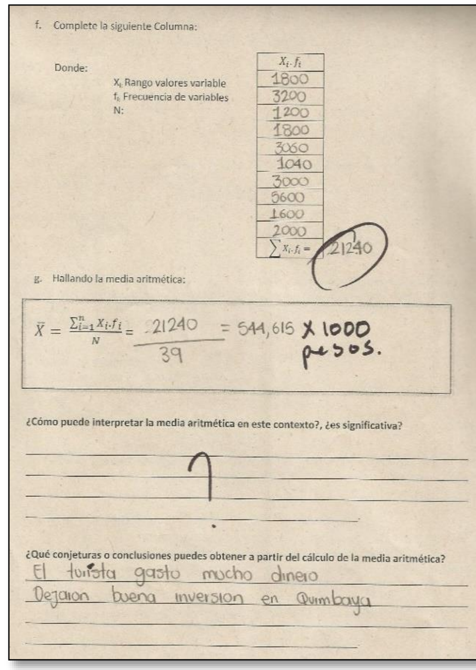
c. Variable Cuanto dinero gastan

d. Tipo de variable Cuantitativa

? 6/39

e. Complete la tabla de frecuencias

Dinero	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Relativa Porcentual
300	6	39/6 = 6,5	6	65
320	1	39/1 = 39	7	39
400	3	39/3 = 13	10	13
450	4	39/4 = 9,75	14	975
510	6	39/6 = 6,5	20.	65
520	2	39/2 = 19,5	22	195
600	5	39/5 = 7,8	27	78
700	8	39/8 = 4,87	35	487
800	2	39/2 = 19,5	37	195
1000	2	39/2 = 19,5	39	195
TOTAL	39	145,92	201	2307



f. Complete la siguiente Columna:

Donde:

X_i Rango valores variable
f_i Frecuencia de variables
N:

$X_i \cdot f_i$
1800
3200
1200
1800
3060
1040
3000
5600
1600
2000
$\sum X_i \cdot f_i =$ 21240

g. Hallando la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{N} = \frac{21240}{39} = 544{,}615 \text{ x 1000 pesos.}$$

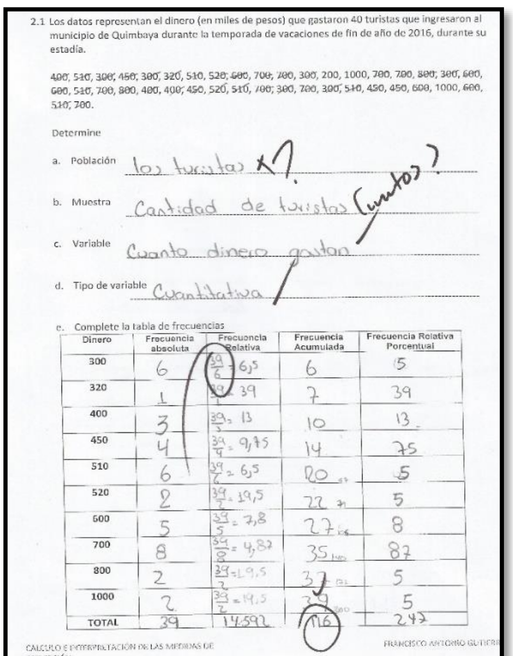
¿Cómo puede interpretar la media aritmética en este contexto?, ¿es significativa?

?

¿Qué conjeturas o conclusiones puedes obtener a partir del cálculo de la media aritmética?

El turista gasto mucho dinero
Dejaron buena inversion en Quimbaya

Fotografías 5*:* Fase 1 Estudiante 2 Conceptos. Registros 1 y 2



2.1 Los datos representan el dinero (en miles de pesos) que gastaron 40 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya durante la temporada de vacaciones de fin de año de 2016, durante su estadía.

400, 510, 300, 450, 300, 320, 510, 520, 600, 700, 700, 300, 200, 1000, 700, 700, 800, 300, 600, 600, 510, 700, 800, 400, 400, 450, 520, 510, 700, 300, 700, 300, 510, 450, 450, 600, 1000, 600, 510, 700.

Determine

a. Población los turistas x ?

b. Muestra Cantidad de turistas (cuantos?)

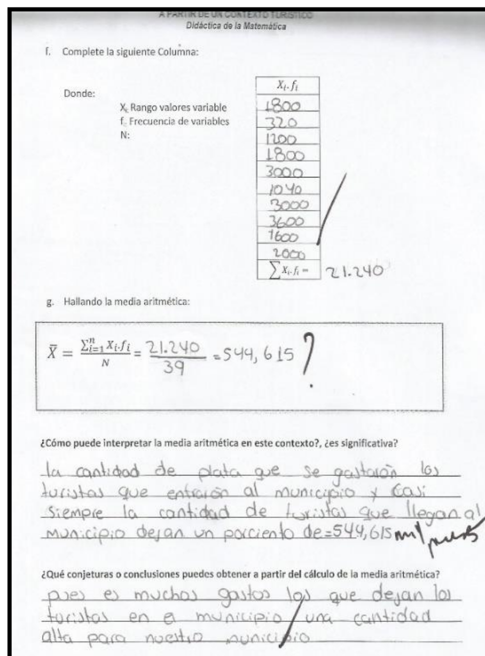
c. Variable Cuanto dinero gastan

d. Tipo de variable Cuantitativa

e. Complete la tabla de frecuencias

Dinero	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Relativa Porcentual
300	6	$\frac{39}{6}$ = 6,5	6	5
320	1	$\frac{39}{1}$ = 39	7	39
400	3	$\frac{39}{3}$ = 13	10	13
450	4	$\frac{39}{4}$ = 9,75	14	75
510	6	$\frac{39}{6}$ = 6,5	20	5
520	2	$\frac{39}{2}$ = 19,5	22	5
600	5	$\frac{39}{5}$ = 7,8	27	8
700	8	$\frac{39}{8}$ = 4,87	35	87
800	2	$\frac{39}{2}$ = 19,5	37	5
1000	2	$\frac{39}{2}$ = 19,5	39	5
TOTAL	39	14.592	116	247

CALCULO E INTERPRETACIÓN DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN FRANCISCO ANTONIO GUTIERR



A PARTIR DE UN CONTEXTO TURÍSTICO
Didáctica de la Matemática

f. Complete la siguiente Columna:

Donde:

X_i Rango valores variable
f_i Frecuencia de variables
N:

$X_i \cdot f_i$
1800
320
1200
1800
3000
1040
3000
3600
1600
2000
$\sum X_i \cdot f_i =$ 21.240

g. Hallando la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{N} = \frac{21.240}{39} = 544{,}615 \ ?$$

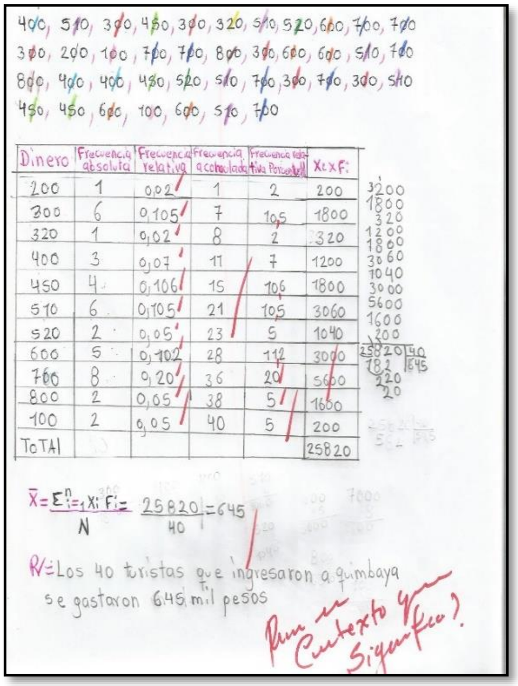
¿Cómo puede interpretar la media aritmética en este contexto?, ¿es significativa?

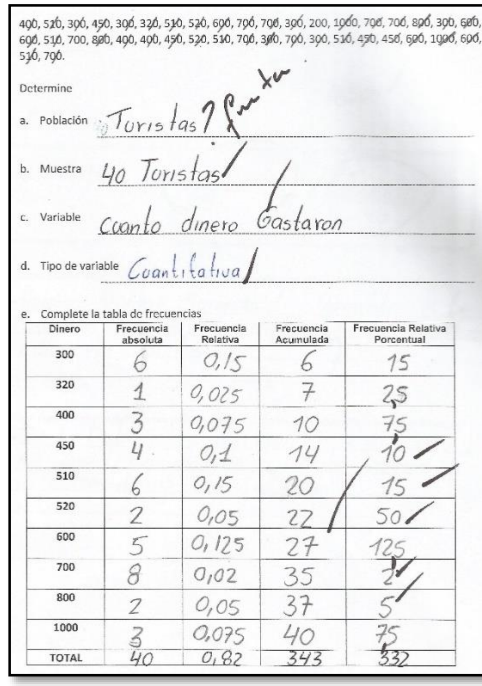
la cantidad de plata que se gastaron los turistas que entraron al municipio y casi siempre la cantidad de turistas que llegan al municipio dejan un porciento de=544,615 mil pesos

¿Qué conjeturas o conclusiones puedes obtener a partir del cálculo de la media aritmética?

pues es muchos gastos los que dejan los turistas en el municipio una cantidad alta para nuestro municipio

Fotografía 6: Fase 1 Estudiante 3 Conceptos. Registros 1 y 2





Fotografía 7: Fase 1 Estudiante 4 Conceptos. Registros 1 y 2

Análisis epistémico de la situación problema (Fase 1).

El análisis epistémico se realiza utilizando la herramienta Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados. Desde el EOS las nociones que giran alrededor de un objeto matemático son: **los elementos lingüísticos**, **conceptos o definiciones**, **propiedades**, **procedimientos**, **argumentos y la situación problema**. Este análisis permite determinar los significados de las nociones del objeto matemático puestas en juego en forma potencial por la situación problema. Con este análisis es posible determinar anticipadamente los conflictos potenciales que se pueden presentar durante la solución de la tarea planteada.

En la siguiente tabla se presenta la situación problema y el análisis epistémico correspondiente.

Tabla 6. Análisis Epistémico de la Situación problema (fase 1)

Tipos de objetos	**Significados (relación de referencia o de uso)**
SITUACIONES PROBLEMAS	
Miguel desea determinar qué tanto es la diferencia o dispersión en cuanto al registro de datos que corresponden al dinero gastado por 40 turistas que ingresan el municipio de Quimbaya en una temporada vacacional.	
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas …)	
Edad	Unidad de medida cuantificada
40	Representación de numero natural
Registro	Dato o numero
Turista	Persona que ingresa a un lugar y su permanencia es de 1 o más.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Promedio	Operación matemática que representa el referente de los datos.
Dispersión	Concepto estadístico para determinar la homogeneidad o heterogeneidad.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Sumatoria de los registros	Permite hallar la suma total de los registros que conforman la muestra.
Promedio de los registros	Permite hallar la media, es decir el valor referente a la muestra.
Desviaciones de los registros	Permite hallar la distancia entre el registro y el valor medial.
Varianza de la muestra	Permite determinar el comportamiento y variabilidad de los datos registrados en la muestra.
Desviación estándar de la muestra	Nos indica que tan homogénea o heterogénea es la muestra
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	
$P_{1:}$ La sumatoria de	Nos permite entender que existe una simetría entre los resultados positivos y negativas. Lo cual nos generaría una distribución uniforme.

las desviaciones de cada término con respecto a la media es igual a cero.	
P_2: Una serie de datos solo tiene una media.	Existe un valor único
P_3: La varianza siempre será un valor positivo o cero	Nunca será negativo la varianza
P_4: La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza de una variable aleatoria.	La desviación típica o estándar se obtiene a partir de la raíz cuadrada del resultado de la varianza.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades usadas)	
A_1: Aplicaciones de las desviaciones.	Justificar propiedad 1
A_2: La media aritmética es	Justificar propiedad 2

la sumatoria de todos los datos de una muestra dividido el número total de datos.	
A_3: La varianza determinara el grado de dispersión de los datos.	Justificar propiedad 3 y 4
Conflictos potenciales • Las propiedades de la sumatoria de los registros. • Interpretación de la media aritmética y sus propiedades. La simbología genera algunos conflictos con otras medidas de dispersión. • Las propiedades de la varianza. • Manejar el concepto de valor absoluto para que las desviaciones sean positivas.	

Descripción del proceso instruccional observado

El objetivo de la enseñanza observada consiste en que los estudiantes recuerden, interpreten y formalicen las definiciones de correspondencia, dispersión, rango, varianza desviación media, desviación estándar, aplicándolas en una situación que pone en juego conocimientos de la matemática estadística: la dispersión y las inferencias que producen unos conjuntos de datos obtenidos a partir de un contexto social. Se supone que los estudiantes han estudiado previamente las definiciones de dichas nociones y se acepta que la tarea matemática es un “ejercicio de aplicación”.

Tabla 7. Cuestiones propuestas a los estudiantes. Elaboración de los autores.

Los datos representan el dinero (en miles de pesos) que gastaron 40 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya durante la temporada de vacaciones de fin de año de 2016, durante su estadía. 400, 510, 300, 450, 300, 320, 510, 520, 600, 700, 700, 300, 200, 1000, 700, 700, 800, 300, 600, 600, 510, 700, 800, 400, 400, 450, 520, 510, 700, 300, 700, 300, 510, 450, 450, 600, 1000, 600, 510, 700. 1. Determinen la población, muestra, variable y el tipo de variable del estudio estadístico. 2. Completar la tabla de frecuencias a partir de los datos arrojados. 3. ¿Cuál es el promedio de gastos que generan los 40 turistas? 4. ¿El valor del promedio, se encuentra dentro de la muestra representativa de los valores obtenidos? 5. ¿Si variamos la muestra, es decir incrementamos o disminuimos el conjunto de datos que sucede con el promedio, cambia? 6. Que tan dispersos están los datos con respecto al valor central

Para trabajar las cuestiones propuestas se dedicaron dos clases de 60 minutos. En la tabla 10 se presenta de manera resumida la descripción de las actividades realizadas en cada una de ellas.

Tabla 8. Resumen de las actividades realizadas en clase. Elaboración de los autores.

clase	**Descripción**
1	El profesor inicia la clase citando una situación problema a partir de un contexto real y que involucre el entorno en donde vive. Luego les pide que a partir de la información suministrada, realice los procedimientos indicados.
2	Los estudiantes inician con la recopilación de los datos, organizándolos en tablas de frecuencia y calculando los parámetros necesarios para el proceso analítico.
3	El profesor inicia el acompañamiento a cada estudiante, observando el proceso de cada uno, dando orientaciones necesarias. Les pide a sus estudiantes que contextualice los resultados para que posteriormente tenga una interpretación más enfocada.

4	Los estudiantes, mediante la construcción de la tabla de frecuencias, abarcan los datos y parámetros necesarios para iniciar el cálculo del rango, desviación media, varianza, desviación estándar, coeficiente de variación.

Análisis cognitivo de la situación problema

COMPONENTES:	**INDICADORES:**
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Se hace una revisión bibliográfica, sobre los conceptos básicos de la estadística, los instrumentos usados y los estadígrafos que estarán en la ejecución de este proceso de la fase 1. • Se realiza la ejercitación de identificar, definir e interpretar conceptos como población, muestra y variables.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se programan ejercicios en el aula y talleres en grupo. Además de consultas sobre estadígrafos de centralización y dispersión, para hacer aplicaciones en situaciones utópicas. • Se adecua el logro durante el periodo académico y se articula con el plan de área de matemáticas, dando así transverzalizacion a unos de los proyectos institucionales como lo es el turismo.
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos no logran de manera exitosa la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: • Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva • Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

2. Resultados del desarrollo de la secuencia didáctica 2

Se evidencia que hay un manejo adecuado de las unidades de medida, ya que se realizan los cálculos colocando dichas unidades correspondientes y se le facilita para su interpretación. Sin embargo, no se logra la idoneidad del concepto, debido a que tiene dificultad de interpretar de forma adecuada el valor de la media aritmética ($\bar{x}$), luego de ser calculada. Además de la incidencia y cómo repercute en el contexto donde se basa la situación problema. Algunos estudiantes no mostraron resultados o avances en la solución de la situación problema en el salón de clase, debido a los inconvenientes presentados de no tener claridad en los conceptos y en los procesos, además de no contar con apoyo de instrumentos electrónicos como calculadores o celulares. En el momento de calcular los porcentajes, no representa con la cantidad suficiente de decimales, para lograr un redondeo y llegar a una cifra exacta. Debido a estos inconvenientes, un procedimiento mal hecho o un error de conceptualización ó un mal cálculo, influye en el cálculo de las medidas de dispersión y por ende en su interpretación en el contexto donde se está trabajando.

ÍTEM	CORRECTO	INCORRECTO	N. R.	TOTALES
1. Reconocimiento de objetos y significados	39	1	0	40
2. Manejo de Conceptos y términos estadísticos	22	18	0	40
3. Procedimientos matemáticos	36	3	0	39
4. Interpretación de los conceptos y objeto matemáticos en el contexto	21	16	3	40
5. Interpretación y conclusiones acerca de la incidencia del objeto matemático	15	20	5	40

Tabla 9. Registro de resultados de estudiantes por ítem en Unidad Didáctica 2. Elaboración de propia.

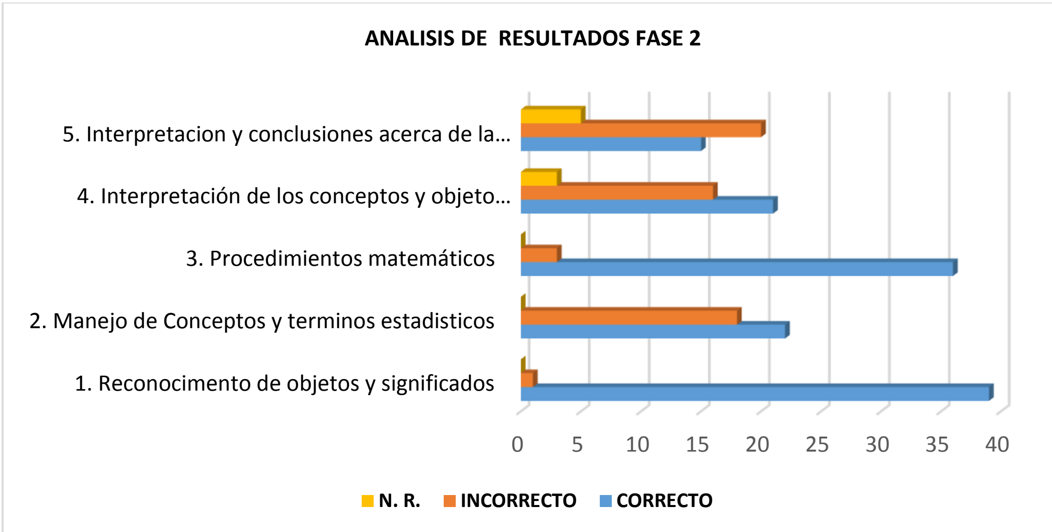
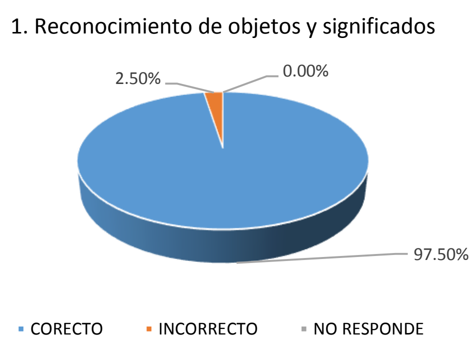


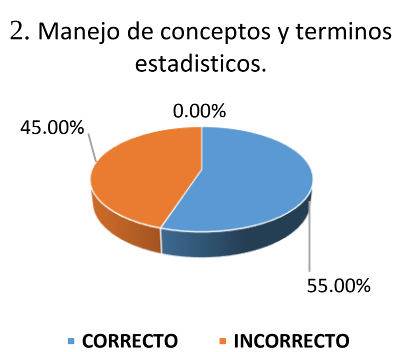
Ilustración 2. Diagrama sobre desempeño de estudiantes Unidad Didáctica 2. Elaboración propia.

Ítem: 1. **Reconocimiento de objetos y significados**



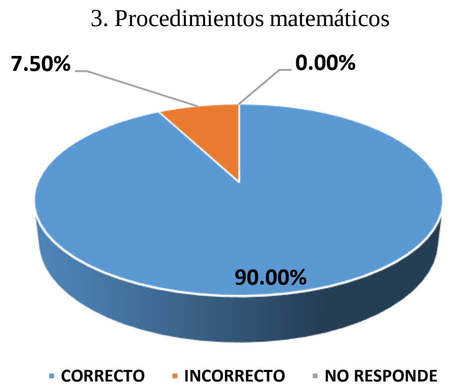
1. ÍTEM	Estu.	%
CORRECTO	39	97,50%
INCORRECTO	1	2,50%
NO RESPONDE	0	0,00%

Ítem: **2. Manejo de conceptos y términos estadisticos**



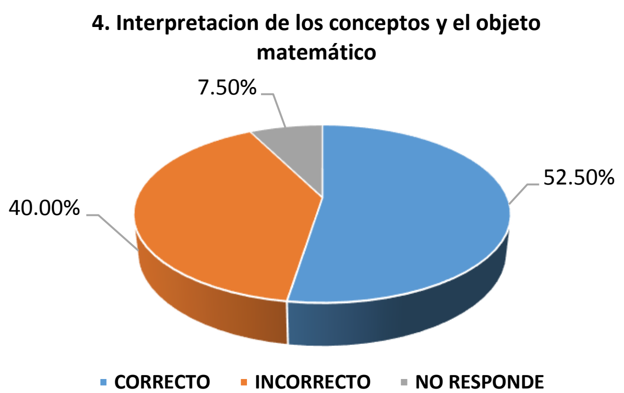
2. ÍTEM	Etud.	%
CORRECTO	22	55,00%
INCORRECTO	18	45,00%
NO RESPONDE	0	0,00%

Ítem: 3. **Procedimiento matemáticos.**



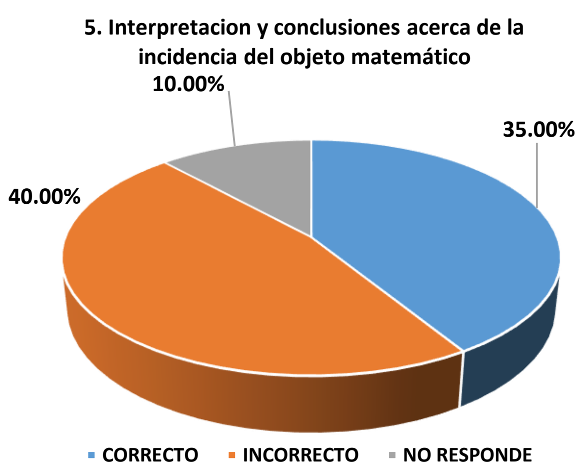
3. ÍTEM	Estd.	%
CORRECTO	36	90,00%
INCORRECTO	3	7,50%
NO RESPONDE	0	0,00%

Ítem: 4. **Interpretación de los conceptos y el objeto matemático en el contexto.**



4. ÍTEM	Estud.	%
CORRECTO	21	52,50%
INCORRECTO	16	40,00%
NO RESPONDE	3	7,50%

Ítem: 5. **Interpretación y conclusiones acerca de la incidencia del objeto matemático.**



ÍTEM	Estud.	%
CORRECTO	14	35,00%
INCORRECTO	16	40,00%
NO RESPONDE	4	10,00%

Componentes e indicadores de la idoneidad afectiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	**-Las tareas tienen interés para los estudiantes.** R: Son actividades que buscan a articulación de su actividad diaria en el entorno donde viven con la enseñanza de la matemática. **-Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.** R: La región por ser turística y ser parte del PCC, se proponen situaciones de índole económica, cultural o social donde involucre recoger datos y desarrollar procedimientos matemáticos para obtener conjeturas y resultados que le ayudaran a su formación.
Actitudes	**- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.** R: Por medio del convenio con el grupo GIOTUQ, se busca la interacción y la participación de los estudiantes en el desarrollo de la actividad estadística. **- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.** R: A través del análisis, los estudiantes obtienen sus propias conclusiones y argumentan el comportamiento de los aspectos sociales basados en los datos. **- Obtiene capacidad de criterio, de tomar decisiones y de conjeturar según los resultados.**
Emociones	R: Durante el desarrollo de las tareas y las actividades, se fortalece la capacidad de raciocinio, de criterio y de deducción. Sensibilizar y motivar la idoneidad afectiva, produce subir el nivel de idoneidad y por ende fortalecer la capacidad de toma de decisiones sobre los resultados obtenidos.

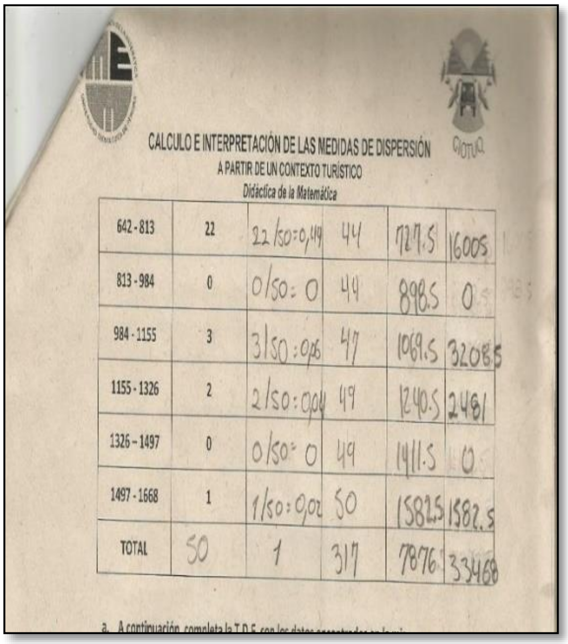
Tabla 10. Indicadores de la idoneidad afectiva. Elaboración propia

Componentes e indicadores de la idoneidad ecológica.

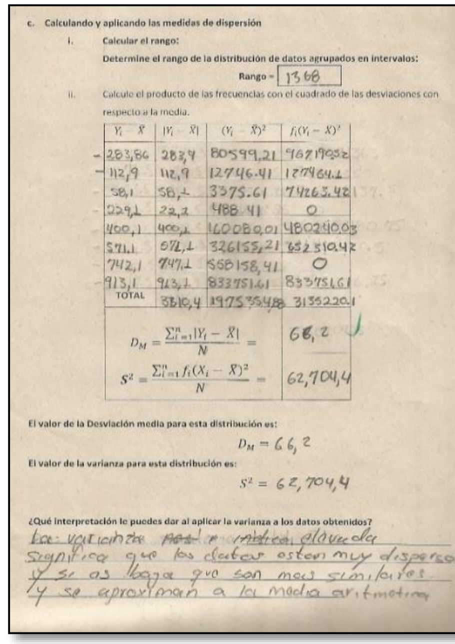
COMPONENTES:	**INDICADORES:**
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares. - Los contenidos temáticos están articulados a la malla de referencia de las pruebas Saber según el ICFES, además de los DBA para grado 9. - El tema tiene relación con la modalidad del colegio, estipulado en el PEI, en plan de estudios.
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes. - Las prácticas se articulan fácilmente, con los comportamientos y tradiciones sociales de los estudiantes. Las situaciones didácticas se adaptan al contexto y su entorno para que se involucren y fortalezca su idoneidad.
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares

Tabla 11. Indicadores de la idoneidad ecológica. Elaboración propia.

Registro de estudiantes


CALCULO E INTERPRETACIÓN DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN
A PARTIR DE UN CONTEXTO TURÍSTICO
Didáctica de la Matemática

642 - 813	22	22/50=0,44	44	727.5	16005
813 - 984	0	0/50= 0	44	898.5	0
984 - 1155	3	3/50 : 0,06	47	1069.5	3208.5
1155 - 1326	2	2/50 : 0,04	49	1240.5	2481
1326 – 1497	0	0/50= 0	49	1411.5	0
1497 - 1668	1	1/50 : 0,02	50	1582.5	1582.5
TOTAL	50	1	317	7876	33468


c. Calculando y aplicando las medidas de dispersión

i. Calcular el rango:

Determine el rango de la distribución de datos agrupados en intervalos:

Rango = 1368

ii. Calcule el producto de las frecuencias con el cuadrado de las desviaciones con respecto a la media.

$Y_i - \bar{X}$	$\lvert Y_i - \bar{X}\rvert$	$(Y_i - \bar{X})^2$	$f_i(Y_i - \bar{X})^2$
-283,86	283,4	80599,21	96719052
-112,9	112,9	12746.41	127464.1
-58,1	58,1	3375.61	74263.42
-229,1	22,2	488.41	0
-400,1	400,1	160080,01	480240.03
-571,1	572,1	326155,21	652310.42
-742,1	747,1	558158,41	0
-913,1	913,1	833751,61	833751,61
TOTAL	3810,4	1975354,88	3135220.1

$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert Y_i - \bar{X}\rvert}{N} =$ 66,2

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X})^2}{N} =$ 62,704,4

El valor de la Desviación media para esta distribución es:

$D_M =$ 66,2

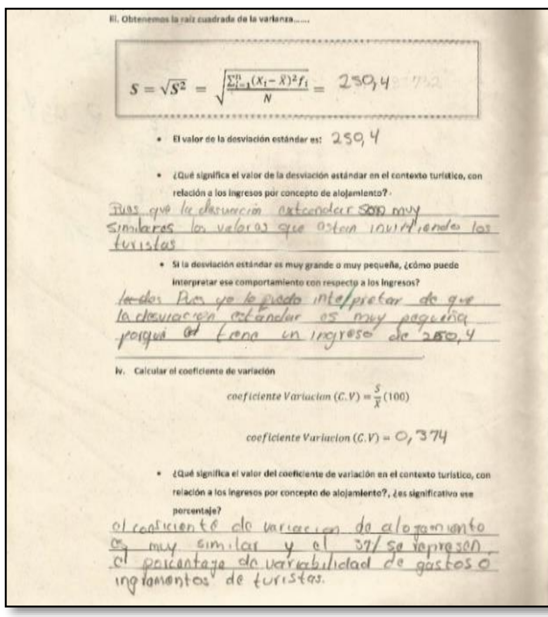
El valor de la varianza para esta distribución es:

$S^2 =$ 62,704,4

¿Qué interpretación le puedes dar al aplicar la varianza a los datos obtenidos?

La varianza ~~[illegible]~~ elevada significa que los datos estan muy dispersos y si es baja que son mas similares y se aproximan a la media aritmetica

Fotografía 8. Fase 2 Estudiante 1 Registro 1 y 2


III. Obtenemos la raiz cuadrada de la varianza......

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{N}} =$ 250,4

- El valor de la desviación estándar es: 250,4
- ¿Qué significa el valor de la desviación estándar en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?

Pues que la desviación estandar son muy similares los valores que estan invirtiendo los turistas

- Si la desviación estándar es muy grande o muy pequeña, ¿cómo puede interpretar ese comportamiento con respecto a los ingresos?

~~todos~~ Pues yo lo puedo interpretar de que la desviación estándar es muy pequeña porque ~~el~~ tiene un ingreso de 250,4

iv. Calcular el coeficiente de variación

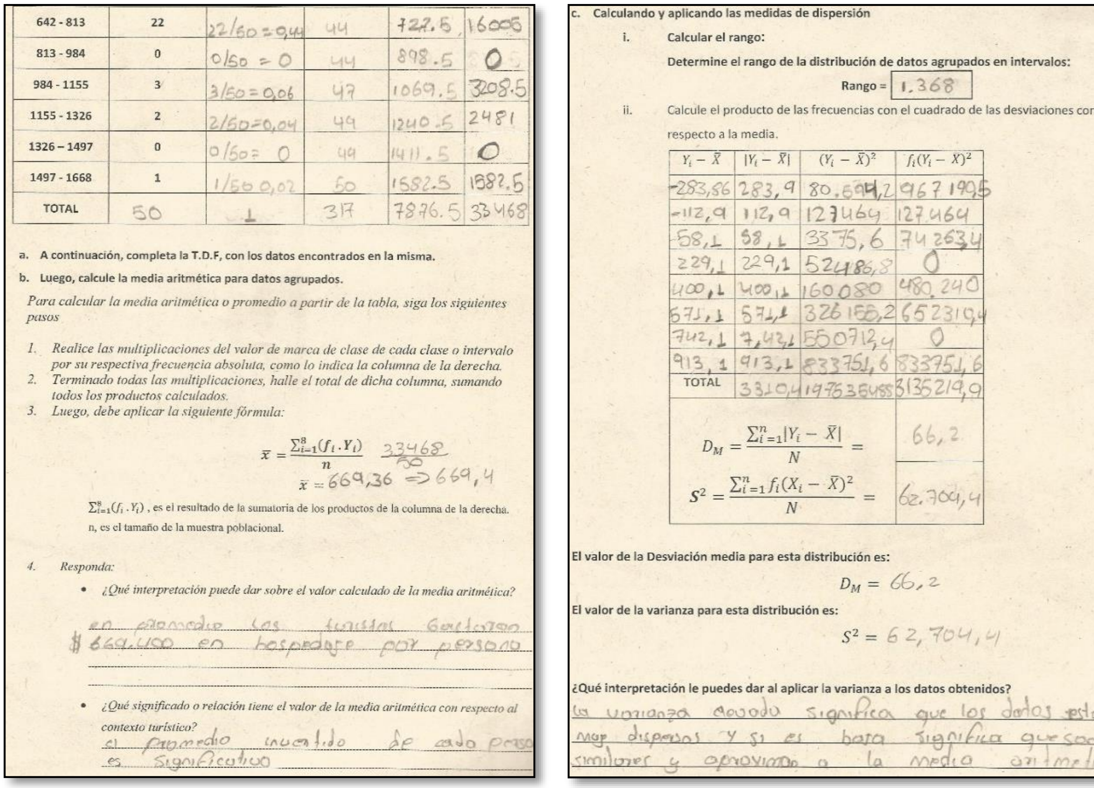
$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = \frac{S}{\bar{X}}(100)$

$coeficiente\ Variacion\ (C.V) =$ 0,374

- ¿Qué significa el valor del coeficiente de variación en el contexto turistico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?, ¿es significativo ese porcentaje?

el coeficiente de variacion de alojamiento es muy similar y el 37% se represen el porcentaje de variabilidad de gastos o ingresos de turistas.

***Fotografía 9**. Fase 2 Estudiante 1 Registro 3*



642 - 813	22	22/50 = 0,44	44	727.5	16005
813 - 984	0	0/50 = 0	44	898.5	0
984 - 1155	3	3/50 = 0,06	47	1069.5	3208.5
1155 - 1326	2	2/50 = 0,04	49	1240.5	2481
1326 – 1497	0	0/50 = 0	49	1411.5	0
1497 - 1668	1	1/50 0,02	50	1582.5	1582.5
TOTAL	50	1	317	7876.5	33468

a. A continuación, completa la T.D.F, con los datos encontrados en la misma.

b. Luego, calcule la media aritmética para datos agrupados.

Para calcular la media aritmética o promedio a partir de la tabla, siga los siguientes pasos

1. *Realice las multiplicaciones del valor de marca de clase de cada clase o intervalo por su respectiva frecuencia absoluta, como lo indica la columna de la derecha.*
2. *Terminado todas las multiplicaciones, halle el total de dicha columna, sumando todos los productos calculados.*
3. *Luego, debe aplicar la siguiente fórmula:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(f_i \cdot Y_i)}{n} \quad \frac{33468}{50}$$

$\bar{x} = 669{,}36 \Rightarrow 669{,}4$

$\sum_{i=1}^{8}(f_i \cdot Y_i)$, es el resultado de la sumatoria de los productos de la columna de la derecha.
n, es el tamaño de la muestra poblacional.

4. *Responda:*

- *¿Qué interpretación puede dar sobre el valor calculado de la media aritmética?*

en promedio los turistas Gastaron $ 669.400 en hospedaje por persona

- *¿Qué significado o relación tiene el valor de la media aritmética con respecto al contexto turístico?*

el promedio invertido de cada perso es significativo

c. Calculando y aplicando las medidas de dispersión

i. Calcular el rango:

Determine el rango de la distribución de datos agrupados en intervalos:

Rango = $\boxed{1.368}$

ii. Calcule el producto de las frecuencias con el cuadrado de las desviaciones con respecto a la media.

$Y_i - \bar{X}$	$\lvert Y_i - \bar{X}\rvert$	$(Y_i - \bar{X})^2$	$f_i(Y_i - \bar{X})^2$
-283,86	283,9	80.594,2	9671995
-112,9	112,9	127464	127464
-58,1	58,1	3375,6	742634
229,1	229,1	52486,8	0
400,1	400,1	160080	480.240
571,1	571,1	326155,2	652310,4
742,1	742,1	550712,4	0
913,1	913,1	833751,6	833751,6
TOTAL	3310,4	1976364,88	3135219,9

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert Y_i - \bar{X}\rvert}{N} = 66{,}2$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^2}{N} = 62.704{,}4$$

El valor de la Desviación media para esta distribución es:

$D_M = 66{,}2$

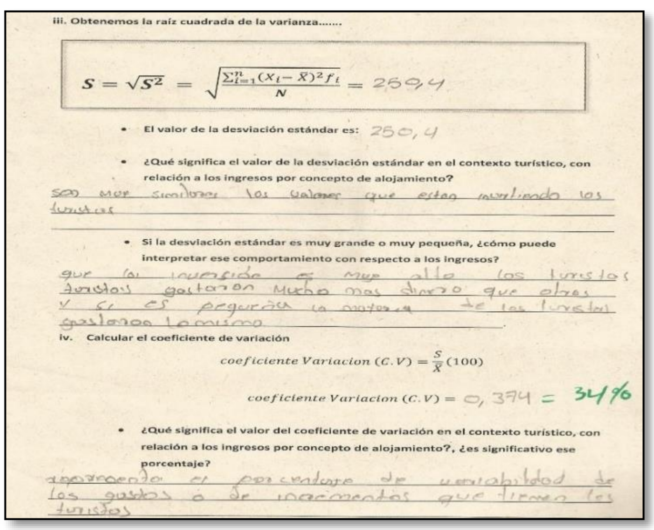
El valor de la varianza para esta distribución es:

$S^2 = 62{,}704{,}4$

¿Qué interpretación le puedes dar al aplicar la varianza a los datos obtenidos?

la varianza elevada significa que los datos esta muy dispersos y si es baja significa que son similares y aproximados a la media aritmeti

Fotografía 10. Fase 2 Estudiante 2 Registro 1 y 2



iii. Obtenemos la raíz cuadrada de la varianza.......

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{N}} = 250{,}4$$

- El valor de la desviación estándar es: 250,4
- ¿Qué significa el valor de la desviación estándar en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?

son muy similares los valores que estan invirtiendo los turistas

- Si la desviación estándar es muy grande o muy pequeña, ¿cómo puede interpretar ese comportamiento con respecto a los ingresos?

que lo invertido es muy alto los turistas turistas gastaron Mucho mas dinero que otros y si es pequeña la mayoría de los turistas gastaron lo mismo

iv. Calcular el coeficiente de variación

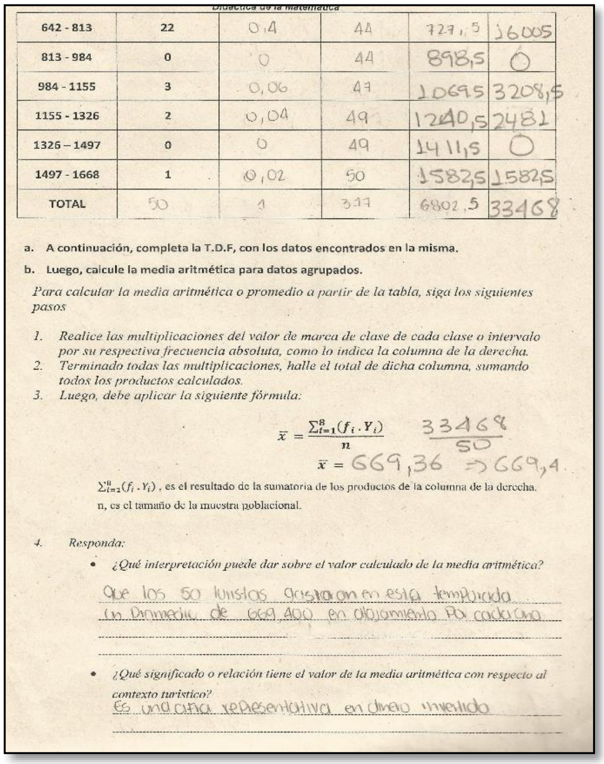
$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = \frac{S}{\bar{X}}(100)$$

$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = 0{,}374 = 34\%$$

- ¿Qué significa el valor del coeficiente de variación en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?, ¿es significativo ese porcentaje?

aumento el porcentaje de variabilidad de los gastos o de incrementos que tienen los turistas

Fotografía 11 Fase 2 Estudiante 2 Registro 3



Didáctica de la matemática

642 - 813	22	0,4	44	727,5	16005
813 - 984	0	0	44	898,5	0
984 - 1155	3	0,06	47	1069,5	3208,5
1155 - 1326	2	0,04	49	1240,5	2481
1326 – 1497	0	0	49	1411,5	0
1497 - 1668	1	0,02	50	1582,5	1582,5
TOTAL	50	1	377	6802,5	33468

a. A continuación, completa la T.D.F, con los datos encontrados en la misma.

b. Luego, calcule la media aritmética para datos agrupados.

Para calcular la media aritmética o promedio a partir de la tabla, siga los siguientes pasos

1. *Realice las multiplicaciones del valor de marca de clase de cada clase o intervalo por su respectiva frecuencia absoluta, como lo indica la columna de la derecha.*
2. *Terminado todas las multiplicaciones, halle el total de dicha columna, sumando todos los productos calculados.*
3. *Luego, debe aplicar la siguiente fórmula:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(f_i \cdot Y_i)}{n} \quad \frac{33468}{50}$$

$$\bar{x} = 669,36 \Rightarrow 669,4$$

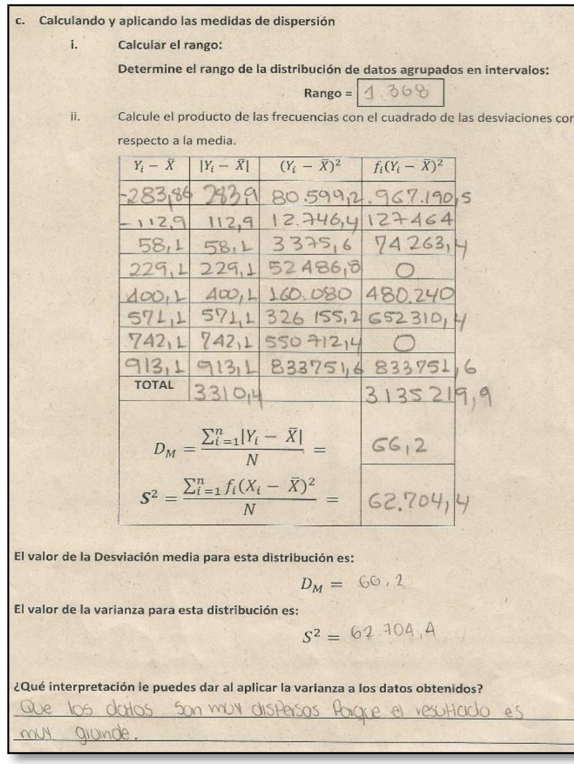
$\sum_{i=1}^{8}(f_i \cdot Y_i)$, es el resultado de la sumatoria de los productos de la columna de la derecha.
n, es el tamaño de la muestra poblacional.

4. *Responda:*
   - *¿Qué interpretación puede dar sobre el valor calculado de la media aritmética?*

que los 50 turistas gastaron en esta temporada un promedio de 669.400 en alojamiento por cada una

   - *¿Qué significado o relación tiene el valor de la media aritmética con respecto al contexto turístico?*

es una cifra representativa en dinero invertido



c. Calculando y aplicando las medidas de dispersión

i. Calcular el rango:

Determine el rango de la distribución de datos agrupados en intervalos:

Rango = $\boxed{1.368}$

ii. Calcule el producto de las frecuencias con el cuadrado de las desviaciones con respecto a la media.

$Y_i - \bar{X}$	$\lvert Y_i - \bar{X}\rvert$	$(Y_i - \bar{X})^2$	$f_i(Y_i - \bar{X})^2$
-283,86	283,9	80.599,2	967.190,5
-112,9	112,9	12.746,4	127464
58,1	58,1	3375,6	74263,4
229,1	229,1	52486,8	0
400,1	400,1	160.080	480.240
571,1	571,1	326 155,2	652310,4
742,1	742,1	550 712,4	0
913,1	913,1	833751,6	833751,6
TOTAL	3310,4		3135219,9

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert Y_i - \bar{X}\rvert}{N} = 66,2$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^2}{N} = 62.704,4$$

El valor de la Desviación media para esta distribución es:

$D_M =$ 66,2

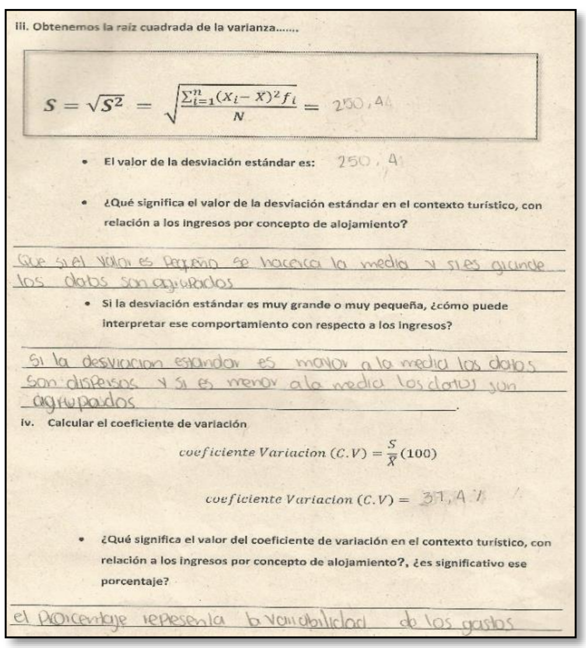
El valor de la varianza para esta distribución es:

$S^2 =$ 62 704,4

¿Qué interpretación le puedes dar al aplicar la varianza a los datos obtenidos?

Que los datos son muy dispersos porque el resultado es muy grande.

Fotografía 12 Fase 2 Estudiante 3 Registro 1 y 2



iii. Obtenemos la raíz cuadrada de la varianza.......

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^2 f_i}{N}} = 250,4$$

- El valor de la desviación estándar es: 250,4
- ¿Qué significa el valor de la desviación estándar en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?

Que si el valor es pequeño se acerca a la media y si es grande los datos son agrupados

- Si la desviación estándar es muy grande o muy pequeña, ¿cómo puede interpretar ese comportamiento con respecto a los ingresos?

Si la desviacion estandar es mayor a la media los datos son dispersos y si es menor a la media los datos son agrupados.

iv. Calcular el coeficiente de variación

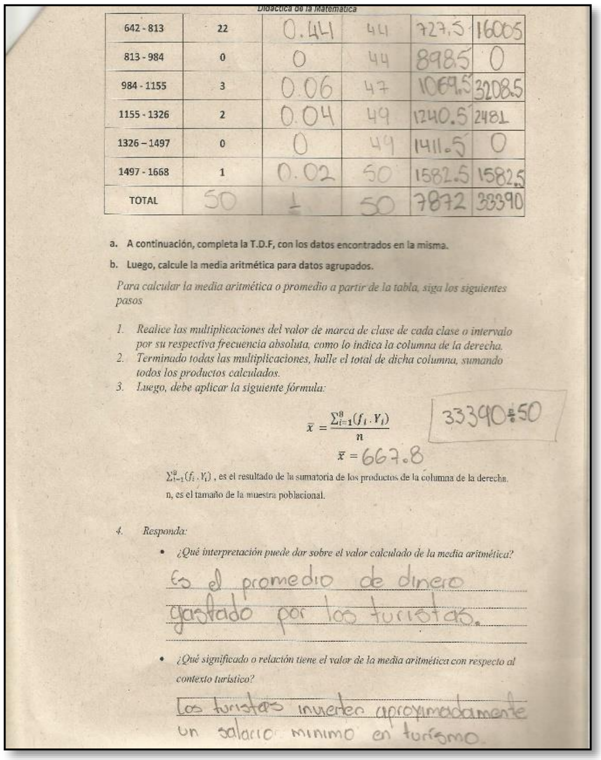
$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = \frac{S}{\bar{X}}(100)$$

$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = 37,4\ \%$$

- ¿Qué significa el valor del coeficiente de variación en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?, ¿es significativo ese porcentaje?

el porcentaje representa la variabilidad de los gastos

Fotografía 13 Fase Estudiante 3 Registro 3



Didáctica de la Matemática

642 - 813	22	0.44	44	727.5	16005
813 - 984	0	0	44	898.5	0
984 - 1155	3	0.06	47	1069.5	3208.5
1155 - 1326	2	0.04	49	1240.5	2481
1326 – 1497	0	0	49	1411.5	0
1497 - 1668	1	0.02	50	1582.5	1582.5
TOTAL	50	1	50	7872	33390

a. A continuación, completa la T.D.F, con los datos encontrados en la misma.

b. Luego, calcule la media aritmética para datos agrupados.

Para calcular la media aritmética o promedio a partir de la tabla, siga los siguientes pasos

1. *Realice las multiplicaciones del valor de marca de clase de cada clase o intervalo por su respectiva frecuencia absoluta, como lo indica la columna de la derecha.*
2. *Terminado todas las multiplicaciones, halle el total de dicha columna, sumando todos los productos calculados.*
3. *Luego, debe aplicar la siguiente fórmula:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot Y_i)}{n}$$

33390÷50

$\bar{x} = 667.8$

$\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot Y_i)$, es el resultado de la sumatoria de los productos de la columna de la derecha.
n, es el tamaño de la muestra poblacional.

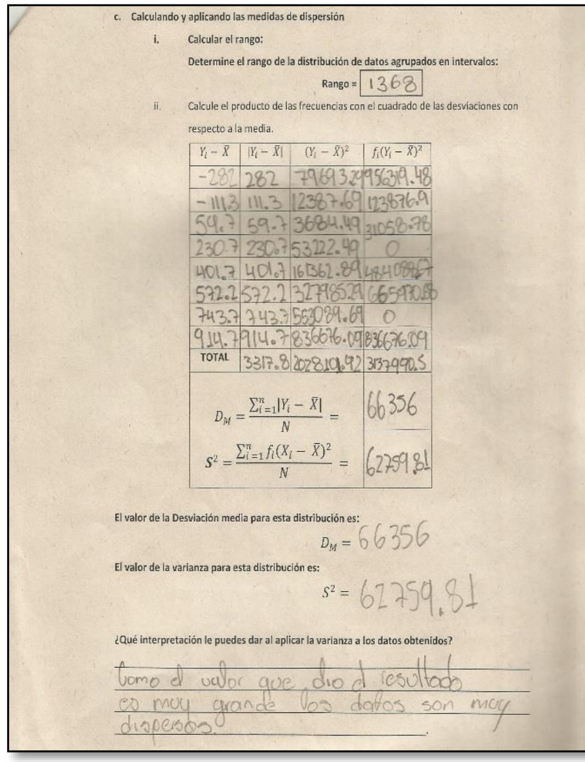
4. *Responda:*

- *¿Qué interpretación puede dar sobre el valor calculado de la media aritmética?*

Es el promedio de dinero gastado por los turistas.

- *¿Qué significado o relación tiene el valor de la media aritmética con respecto al contexto turístico?*

Los turistas invierten aproximadamente un salario minimo en turismo.



c. Calculando y aplicando las medidas de dispersión

i. Calcular el rango:

Determine el rango de la distribución de datos agrupados en intervalos:

Rango = 1368

ii. Calcule el producto de las frecuencias con el cuadrado de las desviaciones con respecto a la media.

$Y_i - \bar{X}$	$\lvert Y_i - \bar{X} \rvert$	$(Y_i - \bar{X})^2$	$f_i(Y_i - \bar{X})^2$
-282	282	79693.24	1956319.48
-111.3	111.3	12387.69	123876.9
59.7	59.7	3684.49	31058.78
230.7	230.7	53222.49	0
401.7	401.7	161362.89	48408[illegible]
572.2	572.2	327985.29	6559[illegible]
743.7	743.7	553089.69	0
914.7	914.7	836676.09	836676.09
TOTAL	3317.8	2028191.92	3137990.5

$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert Y_i - \bar{X} \rvert}{N} =$ 66356

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^2}{N} =$ 62759.81

El valor de la Desviación media para esta distribución es:

$D_M =$ 66356

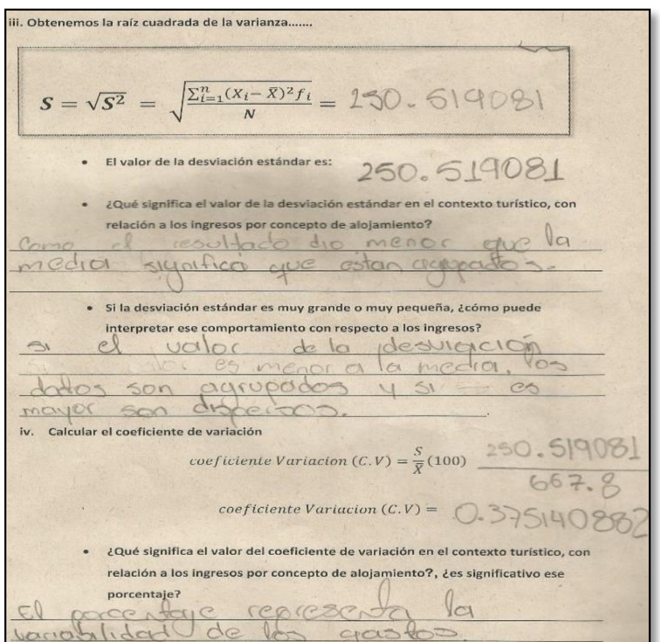
El valor de la varianza para esta distribución es:

$S^2 =$ 62759.81

¿Qué interpretación le puedes dar al aplicar la varianza a los datos obtenidos?

Como el valor que dio el resultado es muy grande los datos son muy dispersos.

Fotografía 14 Fase 2 Estudiante 4 Registro 1 y 2



iii. Obtenemos la raíz cuadrada de la varianza.......

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{N}} = 250.519081$$

- El valor de la desviación estándar es: 250.519081
- ¿Qué significa el valor de la desviación estándar en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?

Como el resultado dio menor que la media significa que estan agrupados.

- Si la desviación estándar es muy grande o muy pequeña, ¿cómo puede interpretar ese comportamiento con respecto a los ingresos?

Si el valor de la desviación es menor a la media, los datos son agrupados y si es mayor son dispersos.

iv. Calcular el coeficiente de variación

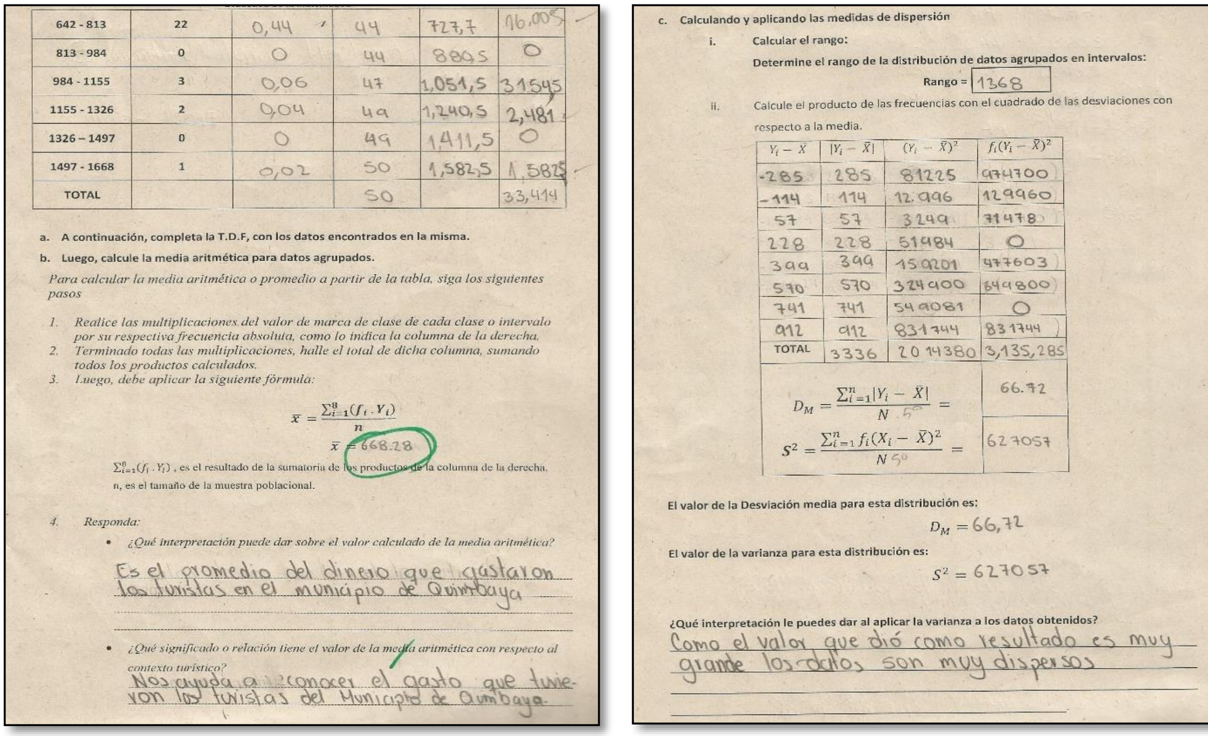
$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = \frac{S}{\bar{X}}(100)$ $\frac{250.519081}{667.8}$

$coeficiente\ Variacion\ (C.V) =$ 0.375140882

- ¿Qué significa el valor del coeficiente de variación en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?, ¿es significativo ese porcentaje?

El porcentaje representa la variabilidad de los gastos.

Fotografía 15 Fase 2 Estudiante 4 Registro 3



642 - 813	22	0,44	44	727,7	16.005
813 - 984	0	0	44	880,5	0
984 - 1155	3	0,06	47	1,051,5	3.1545
1155 - 1326	2	0,04	49	1,240,5	2,481
1326 – 1497	0	0	49	1,411,5	0
1497 - 1668	1	0,02	50	1,582,5	1,5825
TOTAL			50		33,414

a. A continuación, completa la T.D.F, con los datos encontrados en la misma.

b. Luego, calcule la media aritmética para datos agrupados.

Para calcular la media aritmética o promedio a partir de la tabla, siga los siguientes pasos

1. *Realice las multiplicaciones del valor de marca de clase de cada clase o intervalo por su respectiva frecuencia absoluta, como lo indica la columna de la derecha.*
2. *Terminado todas las multiplicaciones, halle el total de dicha columna, sumando todos los productos calculados.*
3. *Luego, debe aplicar la siguiente fórmula:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(f_i \cdot Y_i)}{n}$$

$$\bar{x} = 668.28$$

$\sum_{i=1}^{8}(f_i \cdot Y_i)$, es el resultado de la sumatoria de los productos de la columna de la derecha.

n, es el tamaño de la muestra poblacional.

4. *Responda:*

- *¿Qué interpretación puede dar sobre el valor calculado de la media aritmética?*

Es el promedio del dinero que gastaron los turistas en el municipio de Quimbaya

- *¿Qué significado o relación tiene el valor de la media aritmética con respecto al contexto turístico?*

Nos ayuda a conocer el gasto que tuvieron los turistas del Municipio de Quimbaya.

c. Calculando y aplicando las medidas de dispersión

i. Calcular el rango:

Determine el rango de la distribución de datos agrupados en intervalos:

Rango = 1368

ii. Calcule el producto de las frecuencias con el cuadrado de las desviaciones con respecto a la media.

$Y_i - \bar{X}$	$\lvert Y_i - \bar{X}\rvert$	$(Y_i - \bar{X})^2$	$f_i(Y_i - \bar{X})^2$
-285	285	81225	974700
-114	114	12.996	129960
57	57	3249	71478
228	228	51984	0
399	399	159201	477603
570	570	324900	649800
741	741	549081	0
912	912	831744	831744
TOTAL	3336	2014380	3,135,285

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert Y_i - \bar{X}\rvert}{N\ 50} = \quad 66.72$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i - \bar{X})^2}{N\ 50} = \quad 627057$$

El valor de la Desviación media para esta distribución es:

$D_M = 66,72$

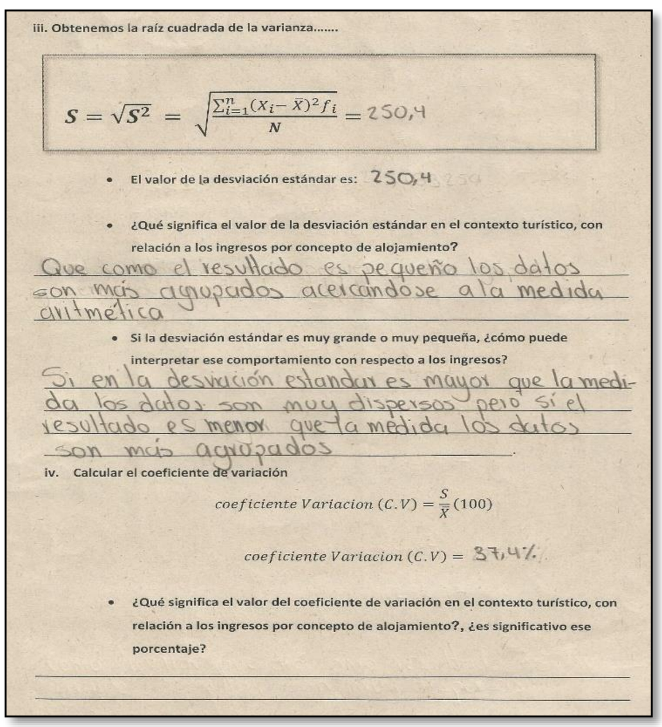
El valor de la varianza para esta distribución es:

$S^2 = 627057$

¿Qué interpretación le puedes dar al aplicar la varianza a los datos obtenidos?

Como el valor que dió como resultado es muy grande los datos son muy dispersos

Fotografía 16 Fase 2 Estudiante 5 Registro 1 y 2



iii. Obtenemos la raíz cuadrada de la varianza.......

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{N}} = 250,4$$

- El valor de la desviación estándar es: 250,4
- ¿Qué significa el valor de la desviación estándar en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?

Que como el resultado es pequeño los datos son más agrupados acercándose a la medida aritmética

- Si la desviación estándar es muy grande o muy pequeña, ¿cómo puede interpretar ese comportamiento con respecto a los ingresos?

Si en la desviación estándar es mayor que la medida los datos son muy dispersos pero si el resultado es menor que la medida los datos son más agrupados

iv. Calcular el coeficiente de variación

$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = \frac{S}{\bar{X}}(100)$$

$$coeficiente\ Variacion\ (C.V) = 37,4\%$$

- ¿Qué significa el valor del coeficiente de variación en el contexto turístico, con relación a los ingresos por concepto de alojamiento?, ¿es significativo ese porcentaje?

Fotografía 17 Fase 2 Estudiante 5 Registro 3

3. Resultados del desarrollo de la secuencia didáctica 3

Para el tercer momento, aún hay evidencias de las dificultades que tiene en el entendimiento e interpretación de los resultados, realizando preguntas específicas relacionadas a las medidas de dispersión, al estudiante aun le cuesta, tener argumentos y conjeturas sobre lo que estas significan, ubicadas en un contexto. A pesar de eso, los estudiantes tienen una idea vacía de lo que estos pueden servir en el contexto de estudio, más sin embargo, se acepta que el nivel de idoneidad de la faceta de Ecológica, aún falta por mejorar.

I. Análisis cualitativo.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Epistémica-ecológica	- El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-afectiva	- El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. - Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. - Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos.
Epistémica-cognitiva mediacional	- El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de

Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	- El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. - El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. - El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos

Tabla 12. Componentes e indicadores de la interacción entre facetas. *(Godino J. , 2010)*

II. Análisis Cuantitativo: evaluación de ítems.

ÍTEM	INSUFICIENTE	MÍNIMO	SATISFACTORIO	AVANZADO
1. Reconocimiento de objetos y significados a partir de tablas y gráficas.	**0**	**0**	**4**	**40**
2. Cálculo e interpretación de los caracteres estadísticos, parámetros y estadígrafos.	**3**	**3**	**11**	**24**
3. Indagación, interpretación y conjeturas sobre los estadígrafos en contexto.	**8**	**11**	**20**	**3**

Tabla 13: Resultados aplicación Secuencia 3. Elaboración propia.

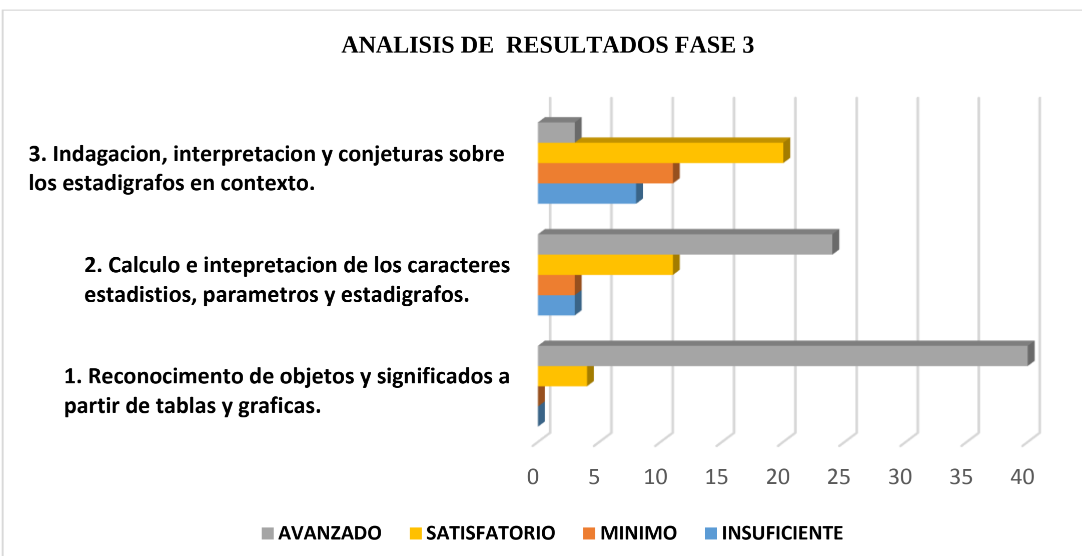
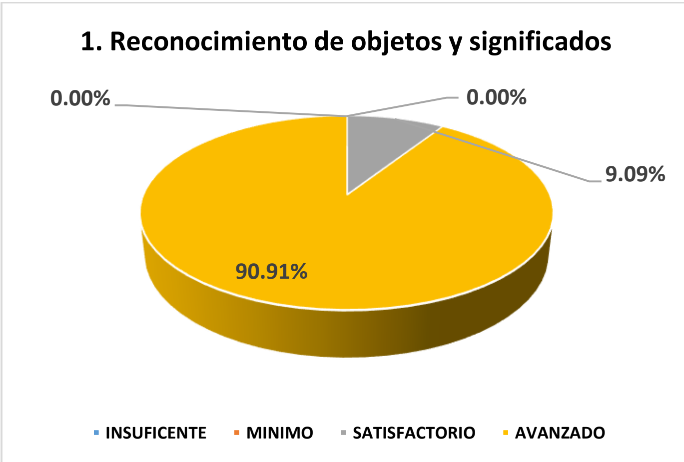


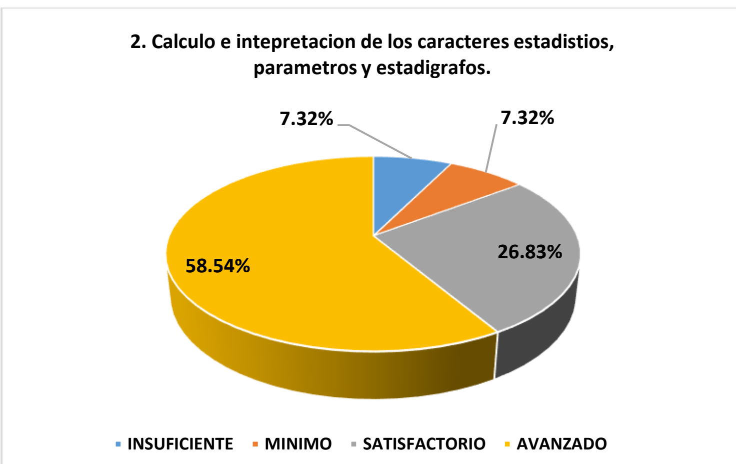
Diagrama 2. Resultados unidad didáctica 3. Elaboración propia.

Ítem: 1. **Reconocimiento de objetos y significados**



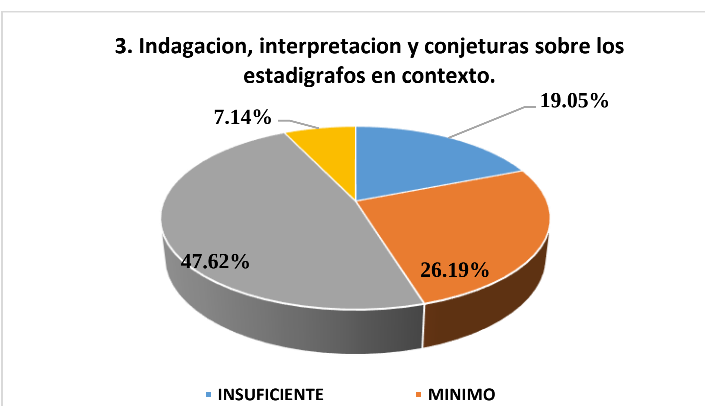
1. ÍTEM	ESTU	%
INSUFICIENTE	0	0,00%
MÍNIMO	0	0,00%
SATISFACTORIO	4	9,09%
AVANZADO	40	90,91%

Ítem: **2. Cálculo e interpretacion de los caracteres estadisticos, parametros, estadigrafos.**



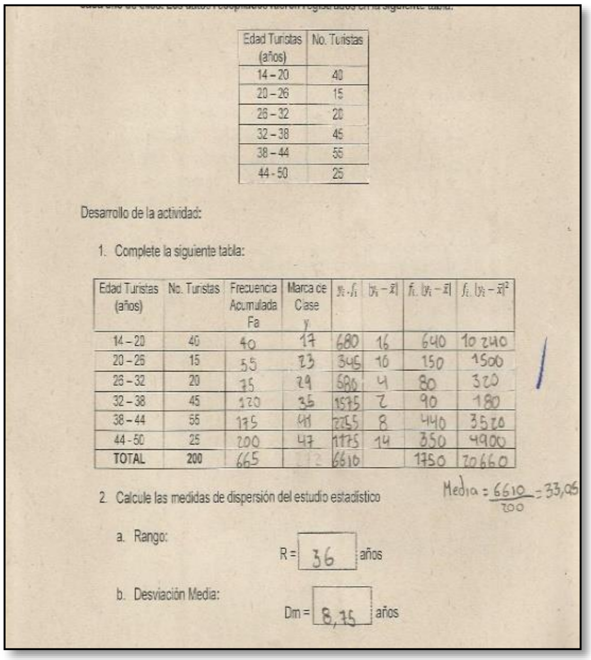
2. ÍTEM	ESTUD.	%
INSUFICIENTE	3	7,32%
MÍNIMO	3	7,32%
SATISFACTORIO	11	26,83%
AVANZADO	24	58,54%

Ítem: 3. Indagación, interpretación y conjeturas sobre los estadígrafos en contexto.



3. ÍTEM	ESTUD	%
INSUFICIENTE	8	19,05%
MÍNIMO	11	26,19%
SATISFACTORIO	20	47,62%
AVANZADO	3	7,14%

4.2.3. Registros de estudiantes



Edad Turistas (años)	No. Turistas
14 – 20	40
20 – 26	15
26 – 32	20
32 – 38	45
38 – 44	55
44 - 50	25

Desarrollo de la actividad:

1. Complete la siguiente tabla:

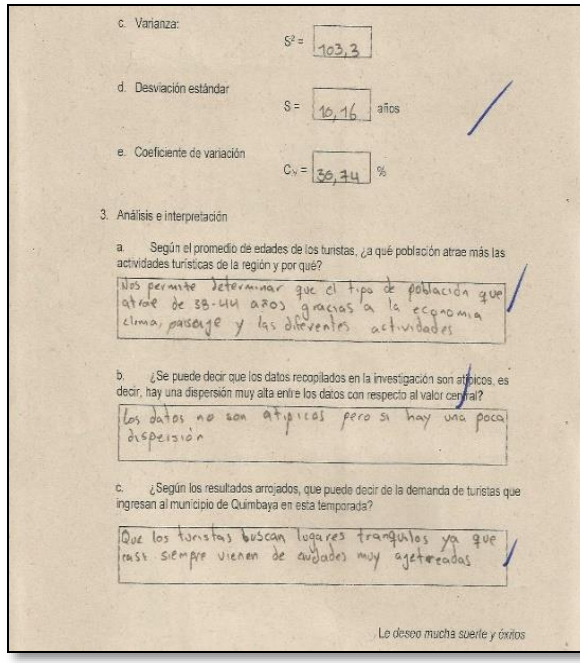
Edad Turistas (años)	No. Turistas	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \cdot f_i$	$\lvert y_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x} \rvert^2$
14 – 20	40	40	17	680	16	640	10 240
20 – 26	15	55	23	345	10	150	1500
26 – 32	20	75	29	580	4	80	320
32 – 38	45	120	35	1575	2	90	180
38 – 44	55	175	41	2255	8	440	3520
44 - 50	25	200	47	1175	14	350	4900
TOTAL	200	665		6610		1750	20660

Media = $\frac{6610}{200}$ = 33,05

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 36 años

b. Desviación Media: Dm = 8,75 años



c. Varianza: S^2 = 103,3

d. Desviación estándar: S = 10,16 años

e. Coeficiente de variación: C_v = 30,74 %

3. Análisis e interpretación

a. Según el promedio de edades de los turistas, ¿a qué población atrae más las actividades turísticas de la región y por qué?

Nos permite determinar que el tipo de población que atrae de 38-44 años gracias a la economía clima, paisaje y las diferentes actividades

b. ¿Se puede decir que los datos recopilados en la investigación son atípicos, es decir, hay una dispersión muy alta entre los datos con respecto al valor central?

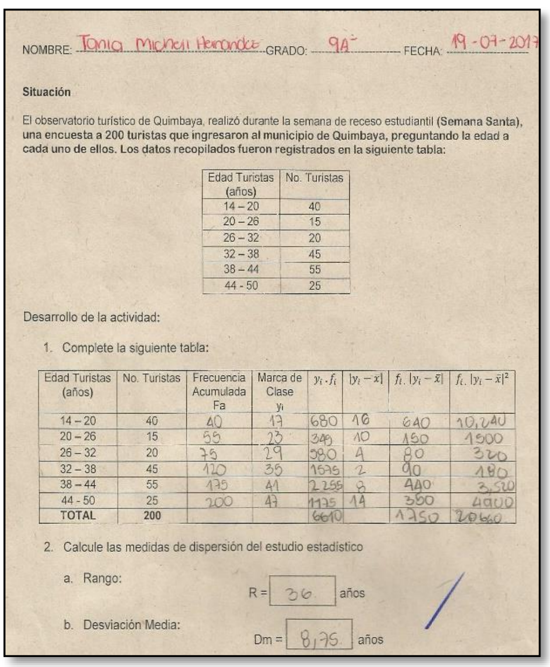
Los datos no son atípicos pero si hay una poca dispersión

c. ¿Según los resultados arrojados, que puede decir de la demanda de turistas que ingresan al municipio de Quimbaya en esta temporada?

Que los turistas buscan lugares tranquilos ya que casi siempre vienen de ciudades muy ajetreadas

Le deseo mucha suerte y éxitos

Fotografía 18 Fase 3 Estudiante 1 Registro 1 y 2



NOMBRE: Tania Michell Hernandez GRADO: 9A FECHA: 19-07-2017

Situación

El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), una encuesta a 200 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya, preguntando la edad a cada uno de ellos. Los datos recopilados fueron registrados en la siguiente tabla:

Edad Turistas (años)	No. Turistas
14 – 20	40
20 – 26	15
26 – 32	20
32 – 38	45
38 – 44	55
44 - 50	25

Desarrollo de la actividad:

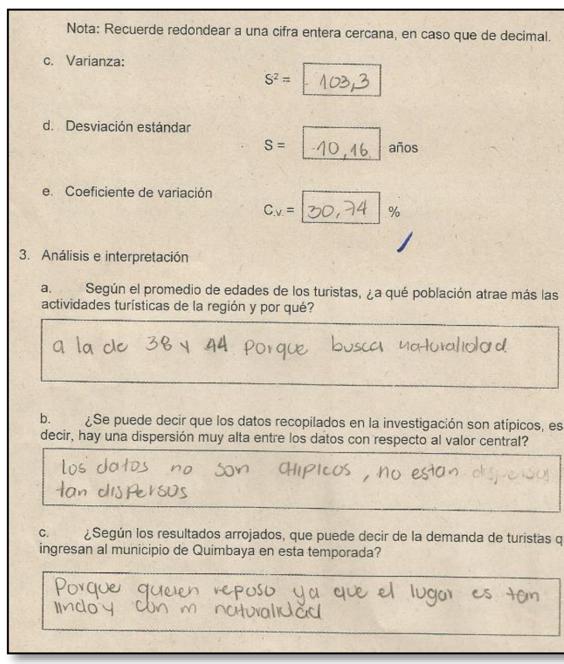
1. Complete la siguiente tabla:

Edad Turistas (años)	No. Turistas	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \cdot f_i$	$\lvert y_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x} \rvert^2$
14 – 20	40	40	17	680	16	640	10,240
20 – 26	15	55	23	345	10	150	1500
26 – 32	20	75	29	580	4	80	320
32 – 38	45	120	35	1575	2	90	180
38 – 44	55	175	41	2255	8	440	3,520
44 - 50	25	200	47	1175	14	350	4900
TOTAL	200			6610		1750	20660

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 36 años

b. Desviación Media: Dm = 8,75 años



Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: S^2 = 103,3

d. Desviación estándar: S = 10,16 años

e. Coeficiente de variación: C.v = 30,74 %

3. Análisis e interpretación

a. Según el promedio de edades de los turistas, ¿a qué población atrae más las actividades turísticas de la región y por qué?

a la de 38 y 44 porque busca naturalidad

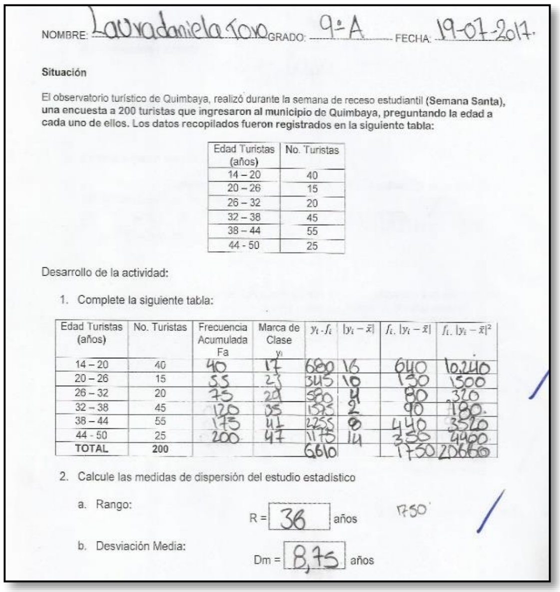
b. ¿Se puede decir que los datos recopilados en la investigación son atípicos, es decir, hay una dispersión muy alta entre los datos con respecto al valor central?

los datos no son atipicos , no estan dispersos tan dispersos

c. ¿Según los resultados arrojados, que puede decir de la demanda de turistas que ingresan al municipio de Quimbaya en esta temporada?

Porque quieren reposo ya que el lugar es tan lindo y con m naturalidad

Fotografía 16 Fase 3 Estudiante 2 Registro 1 y 2



NOMBRE: Lauradaniela Toro GRADO: 9°A FECHA: 19-07-2017.

Situación

El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), una encuesta a 200 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya, preguntando la edad a cada uno de ellos. Los datos recopilados fueron registrados en la siguiente tabla:

Edad Turistas (años)	No. Turistas
14 – 20	40
20 – 26	15
26 – 32	20
32 – 38	45
38 – 44	55
44 - 50	25

Desarrollo de la actividad:

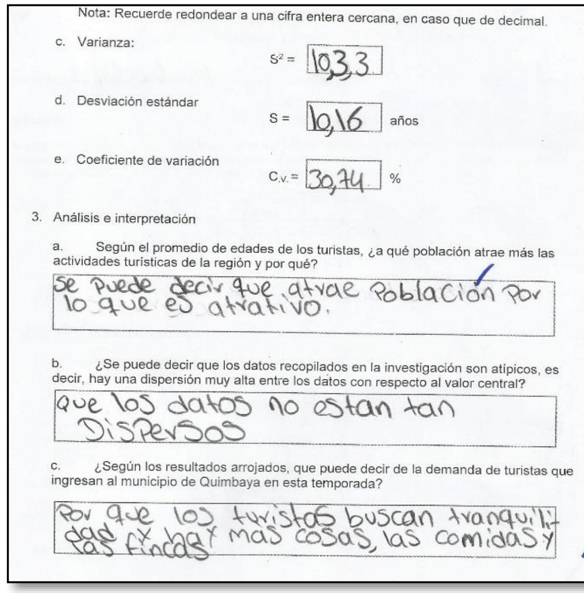
1. Complete la siguiente tabla:

Edad Turistas (años)	No. Turistas	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \cdot f_i$	$\|y_i - \bar{x}\|$	$f_i . \|y_i - \bar{x}\|$	$f_i . \|y_i - \bar{x}\|^2$
14 – 20	40	40	17	680	16	640	10.240
20 – 26	15	55	23	345	10	150	1500
26 – 32	20	75	29	580	4	80	320
32 – 38	45	120	35	1575	2	90	180
38 – 44	55	175	41	2255	8	440	3520
44 - 50	25	200	47	1175	14	350	4900
TOTAL	200			6610		1750	20660

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 36 años 1750

b. Desviación Media: Dm = 8,75 años



Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: S^2 = 103,3

d. Desviación estándar S = 10,16 años

e. Coeficiente de variación C.V. = 30,74 %

3. Análisis e interpretación

a. Según el promedio de edades de los turistas, ¿a qué población atrae más las actividades turísticas de la región y por qué?

Se puede decir que atrae Población Por lo que es atractivo.

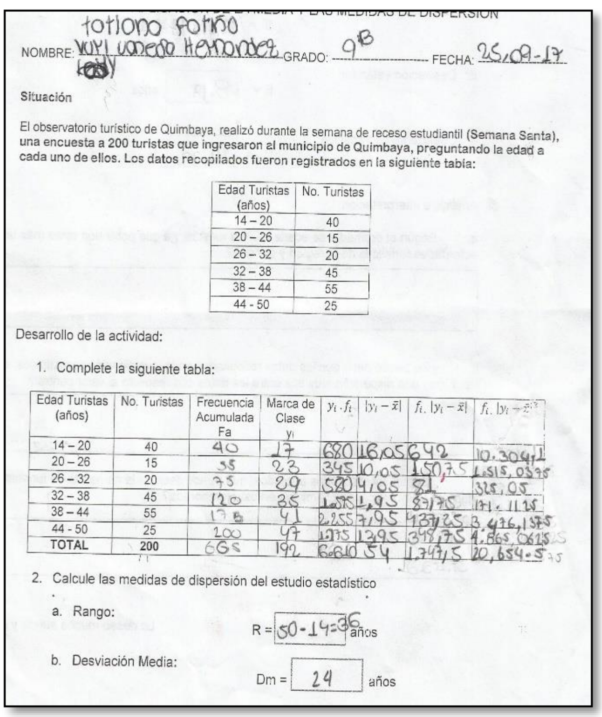
b. ¿Se puede decir que los datos recopilados en la investigación son atípicos, es decir, hay una dispersión muy alta entre los datos con respecto al valor central?

Que los datos no estan tan DisPersoS

c. ¿Según los resultados arrojados, que puede decir de la demanda de turistas que ingresan al municipio de Quimbaya en esta temporada?

Por que los turistas buscan tranquilidad y las fincas y más cosas, las comidas y

Fotografía 17 Fase 3 Estudiante 4 Registro 1 y 2



totiono Potiño

NOMBRE: Yuyi Loaeda Hernandez GRADO: 9B FECHA: 25-09-17

Situación

El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), una encuesta a 200 turistas que ingresaron al municipio de Quimbaya, preguntando la edad a cada uno de ellos. Los datos recopilados fueron registrados en la siguiente tabla:

Edad Turistas (años)	No. Turistas
14 – 20	40
20 – 26	15
26 – 32	20
32 – 38	45
38 – 44	55
44 - 50	25

Desarrollo de la actividad:

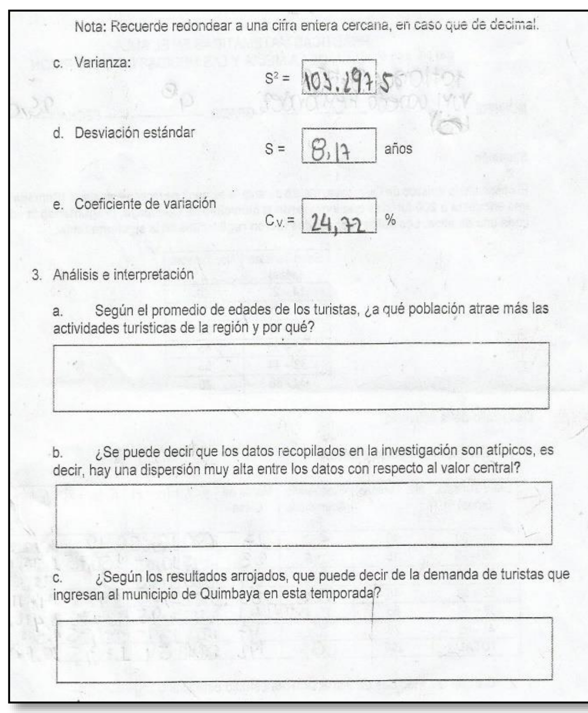
1. Complete la siguiente tabla:

Edad Turistas (años)	No. Turistas	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \cdot f_i$	$\|y_i - \bar{x}\|$	$f_i . \|y_i - \bar{x}\|$	$f_i . \|y_i - \bar{x}\|^2$
14 – 20	40	40	17	680	16,05	642	10.304,1
20 – 26	15	55	23	345	10,05	150,75	1.515,0375
26 – 32	20	75	29	580	4,05	81	328,05
32 – 38	45	120	35	1.575	1,95	87,75	171.1125
38 – 44	55	175	41	2.255	7,95	437,25	3.476,1375
44 - 50	25	200	47	1.175	13,95	348,75	4.865,0625
TOTAL	200	665	192	6.610	54	1.747,5	20,654.575

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 50-14=36 años

b. Desviación Media: Dm = 24 años



Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: S^2 = 103,2975

d. Desviación estándar S = 8,17 años

e. Coeficiente de variación C.V. = 24,72 %

3. Análisis e interpretación

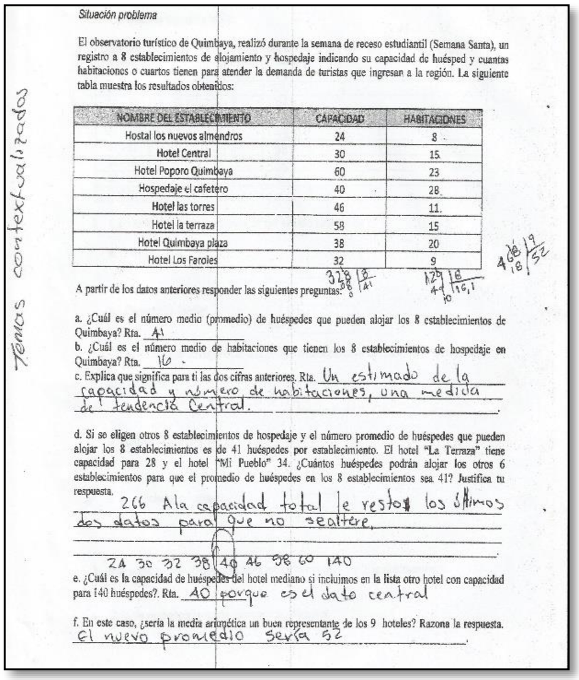
a. Según el promedio de edades de los turistas, ¿a qué población atrae más las actividades turísticas de la región y por qué?

b. ¿Se puede decir que los datos recopilados en la investigación son atípicos, es decir, hay una dispersión muy alta entre los datos con respecto al valor central?

c. ¿Según los resultados arrojados, que puede decir de la demanda de turistas que ingresan al municipio de Quimbaya en esta temporada?

Fotografía 18 Fase 3 Estudiante 6 Registro 1 y 2

4.3.4 Registros de la secuencia didáctica IV



Situación problema

El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), un registro a 8 establecimientos de alojamiento y hospedaje indicando su capacidad de huésped y cuantas habitaciones o cuartos tienen para atender la demanda de turistas que ingresan a la región. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

NOMBRE DEL ESTABLECIMIENTO	CAPACIDAD	HABITACIONES
Hostal los nuevos almendros	24	8
Hotel Central	30	15
Hotel Poporo Quimbaya	60	23
Hospedaje el cafetero	40	28
Hotel las torres	46	11
Hotel la terraza	58	15
Hotel Quimbaya plaza	38	20
Hotel Los Faroles	32	9

Temas contextualizados

A partir de los datos anteriores responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el número medio (promedio) de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos de Quimbaya? Rta. 41

b. ¿Cuál es el número medio de habitaciones que tienen los 8 establecimientos de hospedaje en Quimbaya? Rta. 16

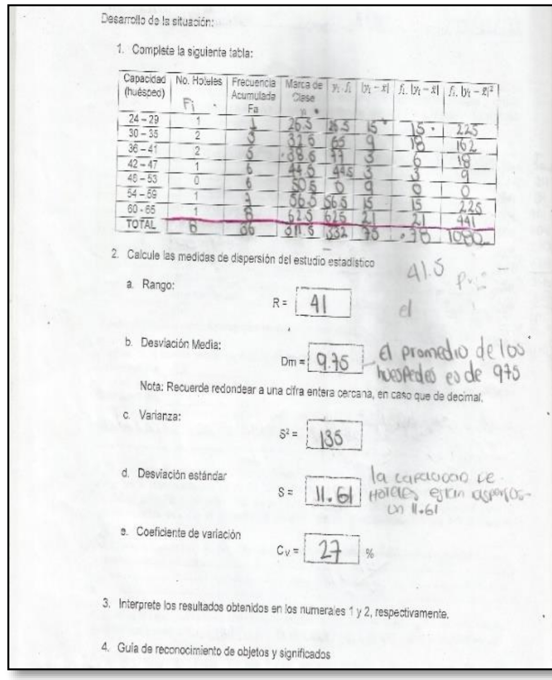
c. Explica que significa para ti las dos cifras anteriores. Rta. Un estimado de la capacidad y número de habitaciones, una medida de tendencia Central.

d. Si se eligen otros 8 establecimientos de hospedaje y el número promedio de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos es de 41 huéspedes por establecimiento. El hotel "La Terraza" tiene capacidad para 28 y el hotel "Mi Pueblo" 34. ¿Cuántos huéspedes podrán alojar los otros 6 establecimientos para que el promedio de huéspedes en los 8 establecimientos sea 41? Justifica tu respuesta.
266 A la capacidad total le resto los últimos dos datos para que no se altere.

24 30 32 38 40 46 58 60 140

e. ¿Cuál es la capacidad de huéspedes del hotel mediano si incluimos en la lista otro hotel con capacidad para 140 huéspedes?. Rta. 40 porque es el dato central

f. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 9 hoteles? Razona la respuesta.
El nuevo promedio sería 52



Desarrollo de la situación:

1. Completa la siguiente tabla:

Capacidad (huésped)	No. Hoteles f_i	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase	$y_i \cdot f_i$	$\lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert^2$
24 – 29	1	1	26.5	26.5	15	15	225
30 – 35	2	3	32.5	65	9	18	162
36 – 41	2	5	38.5	77	3	6	18
42 – 47	1	6	44.5	44.5	3	3	9
48 – 53	0	6	50.5	0	9	0	0
54 – 59	1	7	56.5	56.5	15	15	225
60 – 65	1	8	62.5	62.5	21	21	441
TOTAL	8	36	311.5	332	78	78	1080

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 41

b. Desviación Media: Dm = 9.75 el promedio de los huespedes es de 9.75

Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: S^2 = 135

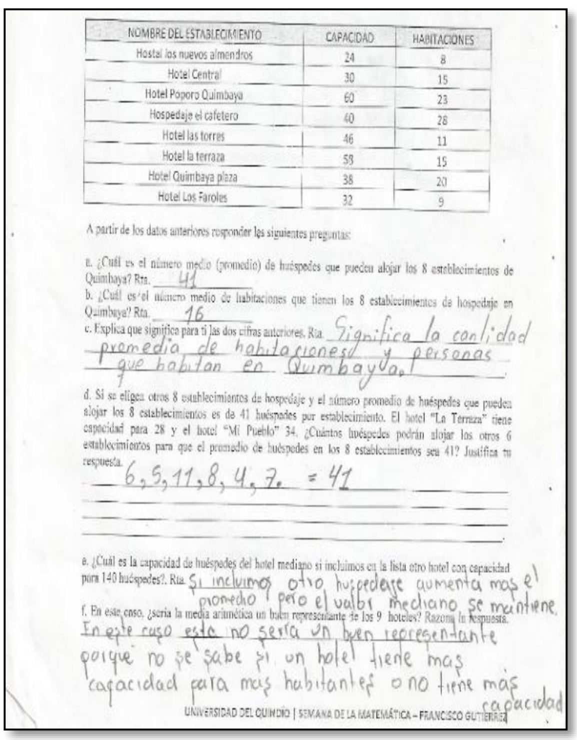
d. Desviación estándar S = 11.61 la capacidad de hoteles están alejados un 11.61

e. Coeficiente de variación Cv = 27 %

3. Interprete los resultados obtenidos en los numerales 1 y 2, respectivamente.

4. Guía de reconocimiento de objetos y significados

Fotografía 19 Registro de Estudiante 1 Desarrollo secuencia didáctica IV.



NOMBRE DEL ESTABLECIMIENTO	CAPACIDAD	HABITACIONES
Hostal los nuevos almendros	24	8
Hotel Central	30	15
Hotel Poporo Quimbaya	60	23
Hospedaje el cafetero	40	28
Hotel las torres	46	11
Hotel la terraza	58	15
Hotel Quimbaya plaza	38	20
Hotel Los Faroles	32	9

A partir de los datos anteriores responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el número medio (promedio) de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos de Quimbaya? Rta. 41

b. ¿Cuál es el número medio de habitaciones que tienen los 8 establecimientos de hospedaje en Quimbaya? Rta. 16

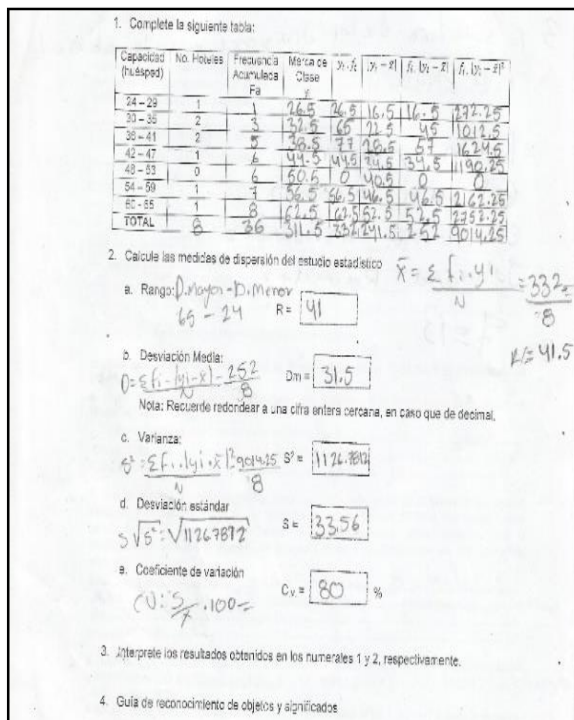
c. Explica que significa para ti las dos cifras anteriores. Rta. Significa la cantidad promedio de habitaciones y personas que habitan en Quimbaya.

d. Si se eligen otros 8 establecimientos de hospedaje y el número promedio de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos es de 41 huéspedes por establecimiento. El hotel "La Terraza" tiene capacidad para 28 y el hotel "Mi Pueblo" 34. ¿Cuántos huéspedes podrán alojar los otros 6 establecimientos para que el promedio de huéspedes en los 8 establecimientos sea 41? Justifica tu respuesta.
6, 5, 11, 8, 4, 7. = 41

e. ¿Cuál es la capacidad de huéspedes del hotel mediano si incluimos en la lista otro hotel con capacidad para 140 huéspedes?. Rta. Si incluimos otro huspedaje aumenta mas el promedio pero el valor mediano se mantiene.

f. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 9 hoteles? Razona la respuesta.
En este caso esto no sería un buen representante porque no se sabe si un hotel tiene mas capacidad para mas habitantes o no tiene mas capacidad

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO | SEMANA DE LA MATEMÁTICA – FRANCISCO GUTIÉRREZ



1. Complete la siguiente tabla:

Capacidad (huésped)	No. Hoteles	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase	$y_i \cdot f_i$	$\lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert^2$
24 – 29	1	1	26.5	26.5	16.5	16.5	272.25
30 – 35	2	3	32.5	65	22.5	45	1012.5
36 – 41	2	5	38.5	77	28.5	57	1624.5
42 – 47	1	6	44.5	44.5	34.5	34.5	1190.25
48 – 53	0	6	50.5	0	40.5	0	0
54 – 59	1	7	56.5	56.5	46.5	46.5	2162.25
60 – 65	1	8	62.5	62.5	52.5	52.5	2756.25
TOTAL	8	36	311.5	332	241.5	252	9014.25

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i \cdot y_i}{N} = \frac{332}{8}$ $\bar{x} = 41.5$

a. Rango: D. Mayor − D. Menor 65 − 24 R = 41

b. Desviación Media: $D = \frac{\Sigma f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert}{N} = \frac{252}{8}$ Dm = 31.5

Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: $S^2 = \frac{\Sigma f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert^2}{N} = \frac{9014.25}{8}$ S^2 = 1126.7812

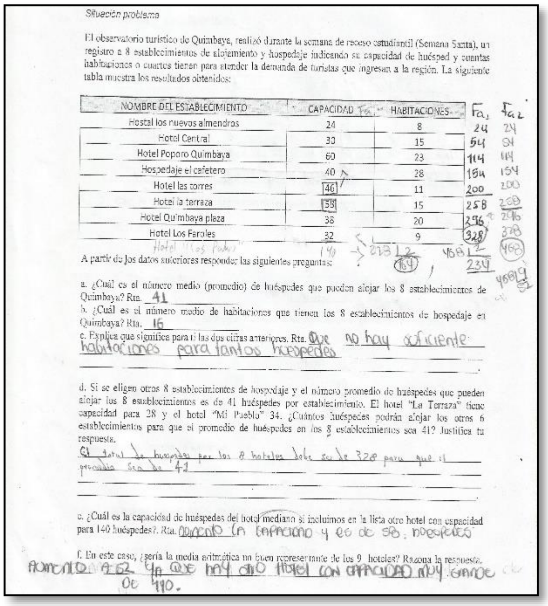
d. Desviación estándar $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1126.7812}$ S = 33.56

e. Coeficiente de variación $CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 =$ Cv = 80 %

3. Interprete los resultados obtenidos en los numerales 1 y 2, respectivamente.

4. Guía de reconocimiento de objetos y significados

Imagen 6: Registro Estudiante 2 Desarrollo secuencia didáctica IV.



Situación problema

El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), un registro a 8 establecimientos de alojamiento y hospedaje indicando su capacidad de huésped y cuantas habitaciones o cuartos tienen para atender la demanda de turistas que ingresan a la región. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

NOMBRE DEL ESTABLECIMIENTO	CAPACIDAD	HABITACIONES	Fa_1	Fa_2
Hostal los nuevos almendros	24	8	24	24
Hotel Central	30	15	54	54
Hotel Poporo Quimbaya	60	23	114	114
Hospedaje el cafetero	40	28	154	154
Hotel las torres	46	11	200	200
Hotel la terraza	58	15	258	258
Hotel Quimbaya plaza	38	20	296	296
Hotel Los Faroles	32	9	328	328
Hotel "Los Pinos"	140			468

A partir de los datos anteriores responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el número medio (promedio) de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos de Quimbaya? Rta. 41

b. ¿Cuál es el número medio de habitaciones que tienen los 8 establecimientos de hospedaje en Quimbaya? Rta. 16

c. Explica que significa para ti las dos cifras anteriores. Rta. Que no hay suficiente habitaciones para tantos huespedes

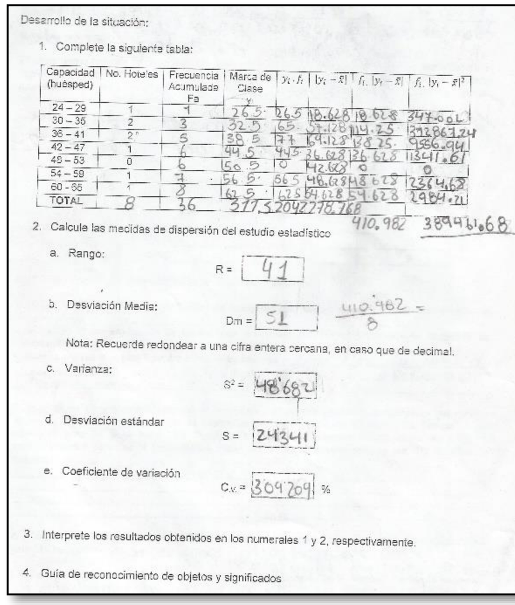
d. Si se eligen otros 8 establecimientos de hospedaje y el número promedio de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos es de 41 huéspedes por establecimiento. El hotel "La Terraza" tiene capacidad para 28 y el hotel "Mi Pueblo" 34. ¿Cuántos huéspedes podrán alojar los otros 6 establecimientos para que el promedio de huéspedes en los 8 establecimientos sea 41? Justifica tu respuesta.

El total de huespedes por los 8 hoteles debe ser de 328 para que el promedio sea de 41

e. ¿Cuál es la capacidad de huéspedes del hotel mediano si incluimos en la lista otro hotel con capacidad para 140 huéspedes?. Rta. Aumento la capacidad y es de 58 huespedes

f. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 9 hoteles? Razona la respuesta.

Aumento a 52 ya que hay otro hotel con capacidad muy grande de 140.



Desarrollo de la situación:

1. Complete la siguiente tabla:

Capacidad (huésped)	No. Hoteles	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \cdot f_i$	$\lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert y_i - \bar{x}\rvert^2$
24 – 29	1	1	26.5	26.5	18.628	18.628	347.001
30 – 35	2	3	32.5	65	57.128	114.25	392867.24
36 – 41	2	5	38.5	77	69.128	138.25	9556.94
42 – 47	1	6	44.5	44.5	36.628	36.628	1341.61
48 – 53	0	6	50.5	0	42.628	0	0
54 – 59	1	7	56.5	56.5	48.628	48.628	2364.68
60 - 65	1	8	62.5	62.5	54.628	54.628	2984.21
TOTAL	8	36	317.5	204	278.768	410.982	389461.68

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 41

b. Desviación Media: Dm = 51 $\frac{410.982}{8} =$

Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: $S^2 =$ 48'682

d. Desviación estándar S = 24341

e. Coeficiente de variación C.v. = 304'209 %

3. Interprete los resultados obtenidos en los numerales 1 y 2, respectivamente.

4. Guía de reconocimiento de objetos y significados

Imagen 7: Registro estudiante 3 Desarrollo secuencia didáctica IV.